

論 著

關於計算可能最大凍結深度及可能最低土溫的問題\*

傅 抱 璞

(南京大學氣象系)

提 要

本文首先詳細地研討了蘇聯學者謝赫特爾(Ф. Н. Шехтер)公式<sup>[1]</sup>中各個參變數在沒有直接觀測的情況下如何確定, 然後作者根據一些推演得到了一個計算可能最大凍結深度與可能最低土溫的方法, 應用這個方法作者計算了一個北京的例子, 結果和實際情況很相符合。

冬季土壤凍結深度和土壤溫度, 特別是可能最大凍結深度和可能最低土溫, 在許多經濟建設部門都很需要。但是目前在我國, 一般氣象台站都沒有土壤凍結深度的觀測, 有些台站在冬季凍結時期甚至還缺少土壤溫度的觀測, 這就使得我們不得不尋求根據其他氣象要素來決定土壤溫度和凍結深度的方法, 這裏我們所要討論的是如何利用蘇聯學者謝赫特爾公式來間接計算可能最大凍結深度及可能最低土溫的問題。

謝赫特爾的基本公式如下:

$$y(t) = \sqrt{\sigma t + y_0^2}; \tag{1}$$

$$\sigma = f(\sigma) = 2160 \frac{\lambda_1}{q} \left[ \frac{\theta_i - \bar{T}}{1 + \frac{2d}{y + y_0}} - 0.8 \frac{\theta_{H^*} - \theta_i}{\frac{37}{\sqrt{\sigma}} - 1} \right]; \tag{2}$$

$$\theta_1(z, t) = [T - \theta_i] \frac{1 - \frac{z}{y}}{1 + \frac{d}{y}} + \theta_i + \delta\theta, \quad 0 \leq z \leq y; \tag{3}$$

$$\theta_2(z, t) = (\theta_{H^*} - \theta_i) \frac{\frac{z}{y} - 1}{\frac{37}{\sqrt{\sigma}} - 1} + \theta_i, \quad y \leq z \leq \frac{23}{\sqrt{\sigma}}y; \tag{4}$$

$$\theta_2(z, t) = (\theta_{H^*} - \theta_i) \frac{\phi\left(\frac{\sqrt{\sigma} z}{41.5 y}\right) - \phi\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{41.5}\right)}{1 - \phi\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{41.5}\right)} + \theta_i, \quad z > \frac{23}{\sqrt{\sigma}}y. \tag{5}$$

這裏  $y$  為凍結深度;  $y_0$  為起始時間的凍結深度;  $t$  為以天做單位的時間 (其他數量均用 C.G.S. 制);  $z$  為深度, 從地面向下為正;  $\theta_1(z, t)$  為凍結層的土溫;  $\theta_2(z, t)$  為未凍層

\* 1957 年 10 月 18 日收到。

的土溫； $\theta_i$  為土壤水開始凍結的溫度， $\theta_{H^*}$  為土壤常溫層的溫度； $T$  為百葉箱高度  $H$  處的氣溫； $\bar{T}$  為在  $t$  時間內的平均氣溫， $\lambda_1$  為凍土的導熱係數， $q$  為每一立方厘米土壤內可能凍結的水分量； $\phi(x)$  為科蘭普(Крамп)函數，而

$$\delta\theta = \frac{H-h}{740\sqrt{t}} \frac{1-\frac{z}{y}}{1+\frac{d}{y}} T(H, t), \quad (6)$$

$$d = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} h,$$

$\lambda_3$  為雪的導熱係數； $h$  為雪的厚度。

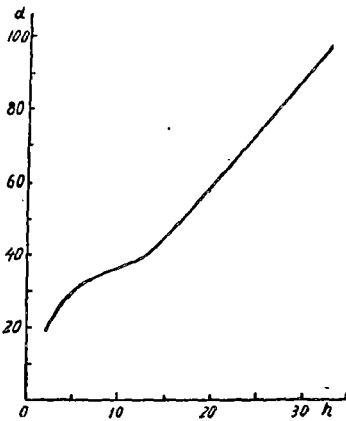
$\sigma$  是一個表徵土壤凍結速度的參變數，可以從(2)式按以下公式用逐步漸近法求得它的數值：

$$\sigma_n = \sqrt{f(\sigma_{n-1})},$$

式中

$$\sigma_0 = \frac{2160\lambda_1}{q} (\theta_i - \bar{T}). \quad (7)$$

根據實際資料，數量  $d$  和雪的厚度  $h$  具有如下圖所示的相依關係。



數量  $d$  和雪高  $h$  的關係

謝赫特爾曾根據卡爾士兩年的觀測紀錄，用以上公式計算了該地冬季和春季六個月的土壤凍結深度變化及 10 厘米深度的土溫變化。結果計算值與實際觀測值相比較，溫度的誤差一般不超過  $1^\circ\text{C}$ ，凍結深度的誤差是 5—10 厘米。這個準確度是比較令人滿意的。

要實際應用謝赫特爾公式，首先必須知道在公式中所包含的各個參變數，而這些參變數一般是很少有觀測記錄的。不過，我們這裏所要解決的問題是計算可能最大凍結深度和可能最低土溫，為了得到最安全的保障，對於影響土壤凍結的各個因素可以作最壞的估計，這就使得問題比較容易處理。

土壤常溫層的溫度是終年不變的，其值就等於該層的年平均溫度，而常溫層的深度就是土溫年振幅所消失的深度。大家知道，在任何深度  $z$  處的土溫年振幅  $A_z$  可以表示如下<sup>[2]</sup>：

$$A_z = A_0 e^{-z \sqrt{\frac{\pi}{k\tau}}}, \quad (8)$$

這裏  $A_0$  為地面溫度的年振幅； $\tau$  為年周期( =  $365.25 \times 24 \times 60 \times 60$  秒)； $k$  為土壤的導熱係數，在大多數情況下等於  $0.003$  厘米<sup>2</sup>/秒。

將  $\tau$  和  $k$  的值代入(8)式中，我們得到

$$A_z = A_0 e^{-\frac{z}{173.7}},$$

或

$$z = 400(\log A_0 - \log A_z). \quad (9)$$

假如當土溫年振幅減小至  $1^{\circ}\text{C}$  時，就近似地認為是常溫層，那末根據(9)式我們得到土壤常溫層的深度為

$$H^* = 400 \log A_0. \quad (10)$$

上式表明土壤常溫層的深度是決定於地面溫度年振幅的大小，我國絕大部分地區的地面溫度年振幅都小於  $50^{\circ}\text{C}$ ，只有少數地方(例如東北)達到這個數值。如果我們取地面溫度年振幅  $A_0$  等於  $50^{\circ}\text{C}$ ，則由(10)式得到，

$$H^* = 680 \text{ 厘米}.$$

由此可見，對於我們的問題說來，土壤常溫層的溫度  $\theta_{H^*}$  最多取 7 米深度的土溫就可以近似地代表之。由於這個溫度經年不變，所以可以臨時測定之。

在有土溫觀測的地方，常溫層的土壤溫度可以更簡單地確定它。因為我們知道，年平均土溫隨深度的變化是很小的，根據地質測定其鉛直梯度 =  $0.03^{\circ}\text{C}/\text{米}$ 。所以就長年平均而論，7 米深度的年平均土溫與地面年平均土溫的差在理論上應當只有  $0.21^{\circ}\text{C}$ ，而 20 米深度(這是中緯度土溫年振幅完全消失的深度，亦即真正常溫層的深度)的年平均土溫與地面年平均土溫的差也不過  $0.6^{\circ}\text{C}$  而已。

表 1 所列，是東北地區 20 個地方 1940 年的土溫深度變化。由該表看出，年平均土溫隨深度的變化確是很小，1 米深度的土溫與 5 米深度的土溫一般相差不過  $0.5^{\circ}$ ，只有齊齊哈爾一地差別較大，達到  $1.1^{\circ}\text{C}$ 。而 2 米深度的土溫與 5 米深度的土溫相差更小，除少數幾個地方外，一般都不超過  $0.4^{\circ}\text{C}$ 。

不難相信，對於多年的平均數值，這種差別還要大為減小。表 2 是 1909—1952 年期間長春、大連和營口三地的平均土溫。長年平均土溫隨深度的變化，從地面直到 5 米深度，在三個地方都不超過  $0.5^{\circ}\text{C}$ 。因此，對於估計可能最大凍結深度和可能最低土溫的精確度來說，我們可以用 2 米甚或 1 米深度的年平均土溫來近似地代表土壤常溫層的溫度  $\theta_{H^*}$  (當然，假如我們能有更深的土溫紀錄那是最好)。這就免除了在有土溫紀錄地方實際測定土壤常溫層溫度的麻煩。

由表 1 還可以看出，年平均土溫隨緯度的變化是比較很有規律的。因此，在有土溫觀測點並不太少的地區，我們可以根據那些有土溫紀錄地方最深一個深度的年平均土溫在地圖上繪出全區域的等值綫圖，而這些等值綫就近似地代表土壤常溫層溫度的等值綫，利用這個等值綫圖我們可以找出其他沒有土溫紀錄地方的土壤常溫層的溫度  $\theta_{H^*}$ 。

由於土壤水中溶解有礦物質，而各種礦物質溶液具有不同的凍結溫度，所以土壤水開始凍結的溫度並不發生在  $0^{\circ}\text{C}$ ，而是隨着土壤水中所含礦物質的成分及多少而變化的。不過，大致說來，一般還是在  $0^{\circ}\text{C}$  附近凍結，因此我們可以近似地假定  $\theta_i = 0^{\circ}\text{C}$ 。

一般說來，土壤凍結最深的年分，總是冷季最冷而降雨和降雪較少的年分。此外，地面積雪還常常容易遭到自然或人們活動的破壞，例如被風吹掉，被車輛及動物踐踏掉，或被人們有意識的清除掉。所以，在計算可能最大凍結深度和可能最低土溫時，雪被厚度  $h$  應當作最小的估計。

在城市內及其他人們聚居的地方，積雪一般是不存在的。還有，在南方緯度地方，事實上往往是沒有長久的積雪。因此，為了安全起見，在很多情況下我們可以近似地假定雪的厚度  $h = 0$ 。

表 1. 東北各地 1940 年的平均土溫

地 點	北 緯	東 經	土 溫 (°C)						$\Delta T$	
			0 米	1 米	2 米	3 米	4 米	5 米	$T_1 - T_5$	$T_2 - T_5$
大 連	38°56'	121°36'	12.6	13.0	12.4	12.7	—	12.6	+0.4	-0.2
興 城	40°39'	120°45'	9.9	10.6	10.8	10.9	—	—	—	—
營 口	40°40'	122°14'	9.7	11.1	10.9	10.6	10.8	11.1	0.0	-0.2
鞍 山	41°04'	122°52'	11.1	10.3	10.2	—	—	—	—	—
錦 州	41°08'	121°07'	9.2	10.7	10.9	10.9	—	10.7	0.0	+0.2
通 化	41°43'	125°55'	8.5	7.6	8.0	8.3	—	8.4	-0.8	-0.4
瀋 陽	41°47'	123°24'	8.5	9.6	9.6	9.9	—	10.5	-0.9	-0.9
撫 順	41°50'	124°07'	8.3	8.0	8.4	—	—	—	—	—
延 吉	42°54'	129°31'	8.3	6.8	6.7	6.8	7.2	7.1	-0.3	-0.4
四 平	43°11'	124°20'	5.5	7.4	7.5	7.6	—	7.5	-0.1	0.0
敦 化	43°23'	128°22'	14.0	4.7	5.1	—	—	—	—	—
長 春	43°52'	125°20'	7.1	6.6	6.6	6.6	—	6.7	-0.1	-0.1
綏 芬 河	44°23'	131°09'	3.4	4.2	4.6	4.8	4.8	4.8	-0.6	-0.2
牡 丹 江	44°35'	129°36'	6.2	5.2	5.2	5.2	5.3	5.2	0.0	0.0
哈 爾 濱	45°45'	126°38'	6.1	5.8	5.9	6.0	—	5.8	0.0	+0.1
佳 木 斯	46°49'	130°21'	5.4	5.4	5.5	5.4	—	6.2	-0.8	-0.7
富 錦	47°14'	131°59'	4.8	4.2	4.3	4.5	4.5	4.6	-0.4	-0.3
齊 齊 哈 爾	47°22'	123°55'	4.2	4.3	4.5	5.0	—	5.4	-1.1	-0.9
克 山	48°04'	125°52'	2.8	2.3	1.9	2.0	2.0	2.1	+0.2	-0.2
嫩 江	49°10'	125°13'	1.5	1.7	1.7	2.0	1.9	2.2	-0.5	-0.5

表 2. 1909—1952 期間東北三個地方的平均土溫

地 點	北 緯	東 經	土 溫 (°C)						$\Delta T$	
			0 米	1 米	2 米	3 米	4 米	5 米	$T_0 - T_5$	$T_2 - T_5$
長 春	43°52'	125°20'	7.0	6.6	7.0	7.1	—	6.9	+0.1	+0.1
大 連	38°56'	121°36'	12.1	12.4	12.1	12.3	—	12.3	-0.2	-0.2
營 口	40°40'	122°14'	10.9	10.6	10.5	10.5	10.6	10.7	+0.2	-0.2

根據一些文獻的資料<sup>[3,4]</sup>可以斷定，凍土的導熱係數大約是未凍土壤導熱係數的 1.2—1.4 倍。因此，我們可以將未凍土壤的導熱係數乘以平均值 1.3 來代替凍土的導熱係數。表 3 所列就是常見的各種未凍土壤的導熱係數。在實際計算時，我們可以根據各地的土壤情況選擇相當的數值。

關於土壤含水量  $q$ ，如果沒有直接觀測資料的話，可以使用馬德爾 (J. R. Mather) 所提出的方法<sup>[5]</sup>根據氣溫和降水的資料間接來決定之。

大家知道，當平均氣溫低於  $0^\circ\text{C}$  時 (更精確一點說，應當是低於土壤水凍結的溫度  $\theta_i$  時)，土壤一般就要開始凍結，因此我們可以把冷季日平均氣溫開始降在  $0^\circ\text{C}$  以下的日子作為起始時間，而此時的起始凍結深度  $y_0 = 0$ 。這樣，便可以解決在應用謝赫特爾公式時沒有  $y_0$  紀錄的困難。

根據以上的討論，如果我們近似地取  $\theta_i = 0$ ； $\lambda_1 = 1.3\lambda_2$ ；並以日平均氣溫開始降在  $0^\circ\text{C}$  以下的日子作為計算的起始時間，則在  $h = 0$  的情形下，公式(1)—(3)及(6)—(7)就

表 3. 各種土壤的導熱係數

土 壤	$\lambda_2$ (卡/度厘米·秒)	土 壤	$\lambda_2$ (卡/度厘米·秒)
沙 土	0.0028	花 崗 岩	0.0097
壤 土	0.0030	砂 岩	0.0107
黑 鈣 土	0.0016	石 灰 岩	0.0040
灰 化 壤 土	0.0008	長 石	0.0058
泥 炭 地	0.0020	石 英	0.0062

可以寫為以下比較便於實際應用的形式：

$$y(t) = \sqrt{\sigma t}; \quad (1a)$$

$$\sigma = f(\sigma) = 2808 \frac{\lambda_2}{q} \left[ -\bar{T} - 0.8 \frac{\theta_{H^*}}{\frac{37}{\sqrt{\sigma}} - 1} \right]; \quad (2a)$$

$$\theta_1(z, t) = \left(1 - \frac{z}{y}\right) T(H, t) + \delta\theta, \quad 0 \leq z \leq y; \quad (3a)$$

$$\delta\theta = \frac{H}{740 \sqrt{t}} \left(1 - \frac{z}{y}\right) T(H, t); \quad (6a)$$

$$\sigma_0 = 2808 \frac{\lambda_2 \bar{T}}{q}. \quad (7a)$$

由公式(1a)看出，一定年分的最大凍結深度應該是發生在  $\sigma$  和  $t$  的乘積最大的時候。同時，由於  $\sigma$  的數值隨着在  $t$  時間內負的平均氣溫絕對值而增大，所以最大凍結深度和最低土溫也必定發生在最低日平均氣溫出現以後的時間（請注意公式(3a)及(4)–(5)）。假如我們計算在這以後每天的  $\sigma t$  及  $\theta_1, \theta_2$ ，當然可以求出最大凍結深度和最低土溫。不過，這樣做法顯然是非常麻煩的。

為了估計最大凍結深度和最低土溫大約出現的時間，我們假定在最低日平均氣溫出現以後的凍結期間，日平均氣溫的變化可以近似地用以下餘弦曲綫表示之：

$$T = T_m \cos \frac{\pi}{2\tau_2} (t - \tau_1), \quad (11)$$

這裏  $T_m$  為最低日平均氣溫； $\tau_1$  為從日平均氣溫開始降在  $0^\circ\text{C}$  以下時至最低日平均氣溫出現時所經過的天數； $\tau_2$  為從最低日平均氣溫出現時至日平均氣溫開始升在  $0^\circ\text{C}$  以上時所經過的天數，其值等於日平均氣溫在  $0^\circ\text{C}$  以下的總天數  $\tau$  減  $\tau_1$ 。

在最低日平均氣溫出現以後任意時間  $t$  內的平均氣溫為

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{t} \left[ \Sigma + \int_{\tau_1}^t T_m \cos \frac{\pi}{2\tau_2} (t - \tau_1) dt \right] = \\ &= \frac{1}{t} \left[ \Sigma + \frac{2\tau_2 T_m}{\pi} \sin \frac{\pi}{2\tau_2} (t - \tau_1) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

這裏  $\Sigma$  為在  $\tau_1$  期間內的氣溫總和。

由此得到

$$y(t) = \sqrt{2808 \frac{\lambda_2}{q} \left[ -\Sigma - \frac{2\tau_2 T_m}{\pi} \sin \frac{\pi}{2\tau_2} (t - \tau_1) - t \frac{0.8\theta_{H^*}}{\frac{37}{\sqrt{\sigma}} - 1} \right]}; \quad (13)$$

$$\theta_1(z, t) = \left(1 + \frac{H}{740 \sqrt{t}}\right) \left(1 - \frac{z}{\sqrt{\sigma t}}\right) T_m \cos \frac{\pi}{2\tau_2} (t - \tau_1). \quad (14)$$

根據作者分析與計算的結果，在最低日平均氣溫出現以後， $\sigma$  隨時間的變化是比較很小的，同時  $\frac{H}{740 \sqrt{t}} \ll 1$  可以略而不計。這樣，假如我們在(13)和(14)兩式中把  $\sigma$  視為常數，並以在整個凍結期間  $\tau$  內的平均值  $\sigma_\tau$  代替之，則由(13)式可以求得最大凍結深度出現的時間  $t'$  如下式：

$$\cos \frac{\pi}{2\tau_2} (t' - \tau_1) = - \frac{0.8\theta_{H^*}}{T_m} \frac{1}{\frac{37}{\sqrt{\sigma_\tau}} - 1} \quad (15)$$

或

$$\sin \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\tau_2} (t' - \tau_1) \right] = - \frac{0.8\theta_{H^*}}{T_m} \frac{1}{\frac{37}{\sqrt{\sigma_\tau}} - 1}.$$

因  $t'$  應該接近於  $\tau$ ，而  $\left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\tau_2} (t' - \tau_1) \right]$  是一個很小的角度，所以我們可以令  $\sin \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\tau_2} (t' - \tau_1) \right] \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\tau_2} (t' - \tau_1)$ ，於是上式變為

$$t' = \tau_1 + \tau_2 \left( 1 + \frac{1.6\theta_{H^*}}{\pi T_m} \frac{1}{\frac{37}{\sqrt{\sigma_\tau}} - 1} \right). \quad (16)$$

同樣，由(14)式可以求得在凍結層內最低土溫出現的時間是

$$t'' = f(t'') = \tau_1 + \frac{2\tau_2}{\pi} \arccos \left[ \frac{\tau_2}{\pi t''} \frac{z}{\sqrt{\sigma_\tau t''} - z} \right]. \quad (17)$$

上式是一超越方程式，我們可以用逐步漸近法求得  $t''$  的解，即  $t_1'' = \frac{1}{2} [\tau_1 + f(\tau_1)]$ ；

$t_2'' = \frac{1}{2} [t_1'' + f(t_1'')]$ ； $\dots$ ，這樣繼續下去，一般求到  $t_3''$  或  $t_4''$  就已足夠準確了。

至於未凍層內的最低土溫，由公式(4)和(5)可以看出大致是出現在最大凍結深度發生的時候。

不要忘記，公式(15)和(17)是在沒有雪被的情形下求得的。如果考慮到雪被存在的話，則它們應由下列二式代替之：

$$t' = \tau_1 + \frac{2\tau_2}{\pi} \arccos \left[ - \frac{0.8\theta_{H^*}}{T_m} \frac{1}{\frac{37}{\sqrt{\sigma_\tau}} - 1} \left( 1 + \frac{2d}{y^*} \right) \right], \quad (18)$$

$$t'' = f(t'') = \tau_1 + \frac{2\tau_2}{\pi} \arccos \left[ \frac{\tau_2}{\pi \sqrt{t}} \frac{z + d}{\left( \sqrt{t} - \frac{z}{\sqrt{\sigma_\tau}} \right) \left( \sqrt{t} + \frac{d}{\sqrt{\sigma_\tau}} \right)} \right], \quad (19)$$

這裏  $y^* = \sqrt{\sigma t^*}$ ， $t^*$  為在(18)式中以  $y(\tau)$  代替  $y^*$  所求得之  $t'$ 。

爲了說明上述方法的應用及其精確的程度，我們舉一個計算北京 1954—1955 年冬季最大凍結深度和最低土溫的例子。該年冬天，北京日平均氣溫 11 月 24 號開始降在 0°C 以下，最低日平均氣溫 (-10.7°C) 出現於 12 月 29 號，在 1 月 21 號以後日平均氣溫又開始升在 0°C 以上。同時，除 12 月 28 號到 1 月 24 號中間有 19 天不大深厚的積雪之外，其餘時間都無雪被，因此我們可以近似地假定  $h = 0$ 。

我們採取  $\lambda_2 = 0.003$ ;  $q = 0.567$ ;  $\theta_{H^*} = 13.7^\circ\text{C}$ ; 假如以 1 月 24 號爲起始時間，則  $\tau_1 = 35$ ;  $\tau_2 = 54$ ; 在  $\tau$  期間內的平均氣溫  $\bar{T} = -4.22^\circ\text{C}$ 。

由(2a)和(7a)首先求出  $\sigma_0 = 62.5$ ;  $\sigma_\tau = 33.2$ 。

根據公式(16)算出最大凍結深度大約出現的時間  $t' = 83$  天，即 2 月 15 號。在這個期間前後求每天的  $\sigma$  和  $t$  的乘積，我們發現 2 月 21 號的  $\sigma t$  最大，由此求得發生於該日的最大凍結深度  $y_M = 54$  厘米。

其次，由公式(17)我們求出，當  $z = 20$  厘米時  $t''_1 = 45.4$ ;  $t''_2 = 46.7$ ;  $t''_3 = 47.1$ ;  $t''_4 = 47.2$ ，所以 20 厘米深度的最低土溫大約出現的時間  $t'' = 47$  天，即 1 月 9 號。再根據公式(3a)求 1 月 9 號附近各天的  $\theta_1$ ，得到該深度的最低土溫爲  $-5.8^\circ\text{C}$ ，出現於 1 月 7 號。

同樣，我們可以求得 10 厘米深度的最低土溫爲  $-8.0^\circ\text{C}$ ，出現於 1 月 7 號；40 厘米深度的最低土溫爲  $-2.2^\circ\text{C}$ ，出現於 1 月 15 號。

表 4 是各深度最低土溫及其出現日期計算值與觀測值的比較。同時爲了檢驗計算的精確性起見，我們把計算最大凍結深度和最低土溫時所附帶算出的六天的凍結深度及各個深度的土溫與實際觀測值一併列舉於表 5。

表 4.

	最低土溫						最大凍結深度	
	溫度 (°C)			出現日期			深度(厘米)	出現日期
	10 厘米	20 厘米	40 厘米	10 厘米	20 厘米	40 厘米		
計算值	-8.0	-5.8	-2.1	1月7日	1月7日	1月15日	54	2月21日
觀測值	-8.1	-6.0	-1.9	1月6日	1月7日	1月16日	—	—

表 5.

日 期	土 溫 (°C)												凍結深度	
	深 度 (厘 米)												(厘米)	
	5		10		15		20		40		80		計算值	觀測值
計算值	觀測值	計算值	觀測值	計算值	觀測值	計算值	觀測值	計算值	觀測值	計算值	觀測值			
1月6日	-9.2	-9.1	-8.0	-8.1	-6.9	-7.1	-5.7	-5.8	-1.2	-1.2	2.4	2.8	45.2	45
1月7日	-9.2	-8.6	-8.0	-7.9	-6.9	-7.2	-5.8	-6.0	-1.3	-1.4	2.3	2.7	45.7	46
1月8日	-7.6	-7.5	-6.7	-6.7	-5.8	-6.2	-4.9	-5.1	-1.2	-1.6	2.3	2.6	46.2	49
1月9日	-8.5	-8.1	-7.4	-7.2	-6.4	-6.6	-5.4	-5.5	-1.4	-1.7	2.2	2.4	46.8	50
1月15日	-9.6	-8.2	-8.5	-7.1	-7.5	-6.3	-6.4	-5.2	-2.1	-1.8	1.8	1.8	50.2	50
2月21日	-1.5	-2.2	-1.3	-2.0	-1.2	-1.9	-1.0	-1.5	-0.4	-0.2	1.2	1.6	54.0	46

由以上二表看出，計算的最低土溫與實際觀測值非常符合，其最大誤差只有  $0.2^{\circ}\text{C}$ 。對於一般時間的計算溫度，雖然誤差稍大，但除 1 月 15 號以外，最多也不超過  $0.7^{\circ}\text{C}$ 。而計算凍結深度的平均誤差是 2.7 厘米。

所謂可能最大凍結深度和可能最低土溫就是在歷年中最大凍結深度和最低土溫絕對值的可能最大值。假如我們能夠決定這個可能最大值出現的年分，那末按照上述方法所求出的該年的最大凍結深度和最低土溫，就是可能最大凍結深度和可能最低土溫。

將(16)代入(13)中，我們得到在一定年分內的最大凍結深度為

$$y_M = \left\{ 2808 \frac{\lambda_2}{q} \left[ -\Sigma - \frac{2\tau_2 T_m}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1.6\theta_{H^*}}{\pi T_m} \frac{1}{\frac{37}{\sqrt{\sigma_\tau}} - 1} \right) - \left[ \tau_1 + \tau_2 \left( 1 + \frac{1.6\theta_{H^*}}{\pi T_m} \frac{1}{\frac{37}{\sqrt{\sigma_\tau}} - 1} \right) \right] \frac{0.8\theta_{H^*}}{\frac{37}{\sqrt{\sigma_\tau}} - 1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

因為在一般情形下  $\frac{1.6\theta_{H^*}}{\pi T_m} \frac{1}{\frac{37}{\sqrt{\sigma_\tau}} - 1} \ll 1$ ，所以上式可以近似地寫為

$$y_M \approx \left\{ 2808 \frac{\lambda_2}{q} \left[ -\Sigma - \frac{2\tau_2 T_m}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - (\tau_1 + \tau_2) \frac{0.8\theta_{H^*}}{\frac{37}{\sqrt{\sigma_\tau}} - 1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

在(12)式中令  $t = \tau$ ，我們得到

$$\bar{T}_\tau = \frac{1}{\tau} \left[ \Sigma + \frac{2\tau_2 T_m}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \right], \quad (22)$$

這裏  $\bar{T}_\tau$  為日平均氣溫在  $0^{\circ}\text{C}$  以下期間的平均氣溫。

將(22)代入(21)並利用  $\tau_1 + \tau_2 = \tau$  的關係，得

$$y_M = \left\{ 2808 \lambda_2 \frac{\tau |\bar{T}_\tau|}{q} \left[ 1 - \frac{0.8}{\frac{37}{\sqrt{\sigma_\tau}} - 1} \frac{\theta_{H^*}}{|\bar{T}_\tau|} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

或

$$y_M = \left\{ 2808 \lambda_2 \frac{|\Sigma T^-|}{q} \left[ 1 - \frac{0.8}{\frac{37}{\sqrt{\sigma_\tau}} - 1} \frac{\theta_{H^*}}{|\bar{T}_\tau|} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

這裏  $|\Sigma T^-|$  為在  $\tau$  期間內氣溫總和的絕對值，換句話說，也就是日平均氣溫在  $0^{\circ}\text{C}$  以下的積溫的絕對值。

因為(23)式右端方括號內第二項的數值永遠小於 1， $y_M$  主要是跟隨着  $\frac{|\Sigma T^-|}{q}$  而變化， $\frac{|\Sigma T^-|}{q}$  愈大， $y_M$  也愈大，而土壤含水量  $q$  又隨着降水量而變化，所以最大的最大凍結深度(即可能最大凍結深度)應當大致是發生在冷季日平均氣溫在  $0^{\circ}\text{C}$  以下的積溫絕對值比較最大而降水又比較很少的年分。

另外，我們不難證明，可能最低土溫永遠是與可能最大凍結深度同年出現。



由上所述，我們可以把求可能最大凍結深度和可能最低土溫的步驟歸結於下：

1. 首先從氣象資料中計算各年冷季日平均氣溫在  $0^{\circ}\text{C}$  以下的積溫  $\Sigma T^-$ ；
2. 從所算出的各年的積溫中找出  $\Sigma T^-$  絕對值第一最大的年分  $x_1$ ，第二最大的年分  $x_2$ ，第三最大的年分  $x_3, \dots$ ，這些年分就是可能最大凍結深度  $y_{MM}$  與可能最低土溫  $\theta_{mm}$  可能發生的年分。
3. 仿照前面例子依次算出  $x_1, x_2, x_3, \dots$  各年的最大凍結深度  $y_{M_1}, y_{M_2}, y_{M_3}, \dots$ 。
4. 從  $y_{M_1}, y_{M_2}, y_{M_3}, \dots$  中挑選出最大的  $y_{M_i}$  ( $i$  表示這個最大凍結深度發生在  $x_i$  年) 就是可能最大凍結深度。
5. 計算  $x_i$  年的最低土溫，即可能最低土溫。

謝赫特爾公式是假定在計算期間內雪的厚度和密度變化較小的條件下而推得。假如實際在凍結期間內積雪深度變化很大，而我們又必須考慮到雪被存在的影響的話，那末就應當把凍結期間分為若干間隔，使得在每個間隔內積雪的厚度變化不大，因而對於謝赫特爾公式仍然可以適用。在這種情形下，可以首先由公式(18)和(19)取在  $\tau$  期間內的平均積雪厚度粗略地估計出最大凍結深度與最低土溫大致發生的時間  $t'$  和  $t''$ ，然後以它們所落在的間隔的起點作為計算的起始時間，根據公式(1)——(7)計算在  $t'$  和  $t''$  附近各天的  $y$  和  $\theta_1$ ，由此求出最大凍結深度  $y_M$  與最低土溫  $\theta_{1m}$ 。這時第一間隔的起始時間仍是日平均氣溫開始降在  $0^{\circ}\text{C}$  以下的日子，而起始凍結深度仍是  $y_0 = 0$ 。第二間隔的起始時間即第一間隔的末了時間，其起始凍結深度乃是第一間隔末了一天的凍結深度。其餘以此類推。

最後還要說明一下，如果我們有土壤表面溫度紀錄的話，那末在前面的公式中完全可以用土壤表面相應的溫度  $\theta_0, \bar{\theta}_0$  和  $\theta_{0m}$  代替空氣溫度  $T, \bar{T}$  和  $T_m$ ，而置  $d$  和  $\delta\theta$  等於零。

### 參 考 文 獻

- [1] Шехтер, Ф. Н. и Цейтин, Г. X., Глубина промерзания и температура почвы в зимнее время. Труды ГГО, 53 (115) (1955), 44—65.
- [2] Тверской, П. Н., Курс метеорологии, Гидрометеонадат. 氣象學教程第二冊，仇永炎等譯，高等教育出版社出版，1954年，383—385.
- [3] Франчук, А. У., Теплопроводность строительных материалов зернистой структуры в зависимости от их влажности. Стройиздат, 1941.
- [4] Гольдштейн, М. Н., Лукьянов, В. С. и др., Сооружение земляного полотна в зимнее время. Трансжелдориздат, 1946.
- [5] Mather, J. R., Determination of soil moisture from climate data. Bull. Amer. Meter. Soc., 35 (1954), 63—68.

ON THE COMPUTATION OF POSSIBLE MAXIMUM  
FREEZING DEPTH AND POSSIBLE LOWEST  
GROUND TEMPERATURE

FU PAO-P'O

*(Department of Meteorology, Nanking University)*

ABSTRACT

First in this paper we have described the method of determination of the parameters in Shiehter's formulae when there is no direct observation. Then a method of computing possible maximum freezing depth and possible lowest ground temperature is given. With this method we have computed the maximum freezing depth and lowest ground temperature at Peking for the winter of 1954. It is found that the results of calculation are in good agreement with the observed values.