

## 一個簡單的二層模式及其推廣\*

廖 洞 賢

(中央氣象科學研究所)

### 提 要

在某些近似下,作者推導了一組閉合的預告 500mb 高度和 500mb 與某等壓面之間的厚度的方程式;把它推廣,作者還求出了一組預告三層等壓面高度的方程式. 和 Sawyer 等人\*\*的作法不同,在推導過程中,垂直速度隨高度的分佈未加以規定. 這些方程式可以用電子計算機計算,也適合於圖解計算,在業務工作中可以應用.

在本文中作者還論證了空間平均場的準恒定性,並提出了選取邊界條件的幾種方法.

### 一. 引 論

在前一篇文章中我們提出了一個適合於圖解計算的兩層模式<sup>[1]</sup>,並用它計算了一個東亞寒潮爆發的例子. 這個模式是不完全的,計算的處理也是相當粗糙的. 在模式中我們只給出了預告 500mb 高度的方程,沒有給出預告 500—1000mb 厚度的方程,因此,在計算時我們只能採取推一次的辦法,可以預告的時間受到了很大限制. 爲了補救這個缺點,在本文中我們提出了一個可以預告兩層等壓面高度的模式,並把它推廣到三層. 這樣,我們就可以按計算上的需要,把時間間隔取得適當地小,經過不多次的反覆運算而作出我們所需要的預告圖來. 顯然,這樣作比過去的做法要優越一些.

### 二. 二層模式

利用方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla_p (\zeta + f) + f \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{V}$  是等壓面上的水平風速;  $\omega = \frac{dp}{dt}$ ;  $\zeta$  是相對渦度的垂直分量;  $f = 2\Omega \sin \varphi$ ;  $\nabla_p$  是等壓面的微分算子. 爲了方便起見,以後我們把凡帶有“ $p$ ”的附標都略去.

仿照 Fjørtoft<sup>[10]</sup> 或我們在前一篇文章<sup>[1]</sup> 中的做法,在地轉近似下把(1)式表示爲差分形式並引進適當省略,我們可以得到

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -(\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{c}_g) \cdot \nabla \xi + \frac{f^2 d^2}{4gm^2} \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad (2)$$

這裏  $\xi = \bar{z} - z + J(\varphi)$ ;  $\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{K} \times \frac{g}{f} \nabla \bar{z}$ ;  $\mathbf{c}_g = \mathbf{K} \times \frac{g}{f} \nabla J(\varphi)$ ;  $z$  是等壓面的高度;  $(\bar{\quad}) = \frac{1}{4} [( \quad)_{x+d,y} + ( \quad)_{x-d,y} + ( \quad)_{x,y+d} + ( \quad)_{x,y-d}]$ ;  $d$  是正方形網格的長

\* 1958 年 3 月 14 日收到.

\*\* 如 A. Eliassen 和 M. A. Estoque 等.

度； $m$  是正形投影地圖的放大係數，它只是緯度的函數，和方向無關； $g$  是重力加速度；

$$J(\varphi) \equiv \int \frac{\Omega^2 d^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{m^2 g}.$$

在前一篇文章<sup>[1]</sup>裏，我們假設了水平風速  $\mathbf{V}$  的分佈可以寫成

$$\mathbf{V}(x, y, p, t) = \mathbf{V}_m(x, y, t) + A(p)\mathbf{V}_T(x, y, t) \quad (3)$$

的形式，其中  $\mathbf{V}_m = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} \mathbf{V} dp$ ； $\mathbf{V}_T$  是某選定的某兩等壓面之間的熱成風。可是，在大氣中  $|\mathbf{V}|$  隨高度並不是單調變化的，在中緯度地區西風往往隨高度增加，而在對流層頂以上却又隨高度減少。因此，儘管根據上面的定義求出的  $\mathbf{V}_m$  是單值的，但是和它相當的  $p_m$ ，即水平風速等於  $\mathbf{V}_m$  的氣壓高度，却可以有兩個以上的數值。另外，在選取  $\mathbf{V}_T$  時，很多人都選擇  $OT_{500}^{\infty}$  圖作參考。這樣作固然可以考慮到整個對流層下半部的熱力情況，並可以把海平面氣壓形勢連繫起來，但是，因這時摩擦層已包含在厚度場內，在預告厚度的方程中不考慮摩擦等複雜因素的作用就顯得很不合理。同時，由於我國地形複雜，西南和西北大片地區的海拔高度都在 1000 到 2000 公尺以上， $OT_{500}^{\infty}$  圖的代表性很差，用這樣的圖來作預告似乎就沒有多大意義。

為了避免這些困難，我們把考慮的大氣限制在接近對流層頂的某等壓面  $p_2 = \text{const}$  和接近海平面的某等壓面  $p_0 = \text{const}$  之間，這樣

$$\mathbf{V}_m = \frac{1}{p_0 - p_2} \int_{p_2}^{p_0} \mathbf{V} dp, \quad (4)$$

在  $p = p_m$  處， $\mathbf{V} = \mathbf{V}_m$ 。顯然，在中緯度地區，一般  $p_m$  是單值的。

為了方便起見，令  $p_m = \text{const}$ ，並選取  $p_5 = 500\text{mb}$  到某接近於摩擦層頂的等壓面  $p_f = \text{const}$  之間的熱成風作  $\mathbf{V}_T$ （這裏  $p_f > p_5$ ），這樣，厚度圖（或熱成風）的代表性問題和不考慮摩擦等複雜因素的合法性就可以部分地得到解決。

利用假定(3)和(4)式，根據前面的定義，我們立即得到

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_m + A\bar{\mathbf{V}}_T, \quad (5)$$

$$\xi = \xi_m + A\eta_T, \quad (6)$$

其中  $( )_m = \frac{1}{p_0 - p_2} \int_{p_2}^{p_0} ( ) dp$ ； $\eta_T = \bar{h} - h$ ； $h$  是  $p_5$  和  $p_f$  之間的厚度。

設在  $p = p_0$  和  $p = p_2$  處， $\omega = 0$ 。對(2)式施以  $( )_m$  運算，則

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial t} = -(\bar{\mathbf{V}}_m + \mathbf{c}_g) \cdot \nabla \xi_m - (A^2)_m \bar{\mathbf{V}}_T \cdot \nabla \eta_T; \quad (7)$$

用同樣方法對(2)式作從任一氣壓高度  $p(p_5 \leq p \leq p_f)$  到  $p = p_0$  的積分，再用  $p_0 - p$  來除，然後再把它從  $p = p_5$  到  $p = p_f$  積分，並用  $p_f - p_5$  來除，再減去(7)式，經過整理我們可以得到

$$\frac{\partial \eta_T}{\partial t} = -(\bar{\mathbf{V}}_m + \mathbf{c}_g) \cdot \nabla \eta_T - \bar{\mathbf{V}}_T \cdot \nabla \xi_m - \frac{[\beta - (A^2)_m]}{\alpha} \bar{\mathbf{V}}_T \cdot \nabla \eta_T - \frac{\Gamma}{\alpha} \omega^*, \quad (8)$$

其中

$$\Gamma = \left[ \frac{1}{p_f - p_5} \int_{p_5}^{p_f} \frac{4gm^2(p_0 - p)}{f^2 d^2} dp \right]^{-1};$$

$$\omega^* = \frac{1}{p_f - p_5} \int_{p_5}^{p_f} \omega dp;$$

$$\alpha = \frac{4gm^2\Gamma}{f^2 d^2(p_f - p_5)} \int_{p_5}^{p_f} \int_p^{p_0} A dp dp;$$

$$\beta = \frac{4gm^2\Gamma}{f^2 d^2(p_f - p_5)} \int_{p_5}^{p_f} \int_p^{p_0} A^2 dp dp.$$

現在，我們已求出預報方程(7)和(8)，其中有三個未知數，即  $\xi_m$ 、 $\eta_T$  和  $\omega^*$ 。要求出它們的解還需要一個獨立的方程式。

引入熱力學第一方程，在乾絕熱情況下我們有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) \frac{\partial z}{\partial p} + \sigma \omega = 0, \quad (9)$$

這裏

$$\sigma \equiv \frac{1}{\theta} \frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial \theta}{\partial p}.$$

對(9)式作從  $p = p_5$  到  $p = p_f$  的積分，並用  $\sigma_c = \text{const}$  來代替  $\sigma$ ，則

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_m \cdot \nabla\right) h = \sigma_c (p_f - p_5) \omega^*, \quad (10)$$

這裏

$$\omega^* = \frac{1}{p_f - p_5} \int_{p_5}^{p_f} \omega dp.$$

把(10)式代入(8)式，經過適當省略，我們可以得到

$$\frac{\partial \xi_T}{\partial t} = -(\bar{\mathbf{V}}_m + \mathbf{c}_g) \cdot \nabla \xi_T - \bar{\mathbf{V}}_T \cdot \nabla (a \xi_m + b \eta_T), \quad (11)$$

其中

$$\xi_T = \frac{1}{1-c} \bar{h} - h; \quad a = \frac{1+c}{1-c}; \quad b = \frac{\beta - (A^2)_m}{(1-c)\alpha}; \quad c = \frac{\Gamma}{\alpha \sigma_c (p_f - p_5)}.$$

(7)和(11)式就是我們求得的預報方程。從上面的推導可以看出：在處理垂直速度的問題上我們只利用了水平風場的假定，除了  $\omega(p_0) = \omega(p_2) = 0$  外，並沒有對它的分佈另外加以限制。像 Eliassen<sup>[8]</sup>，Sawyer<sup>[14]</sup> 等人在(3)式的假定下再規定一個垂直速度場是完全不必要的，也是不應該的，因為這樣作很可能造成垂直速度場和水平風場的一些不協調。

現在，待決定的是這些預報方程中常數的數值。設  $p_0 = 1000\text{mb}$ ， $p_2 = 200\text{mb}$ ， $p_f = 850\text{mb}$ ，從前面的假設，不難看出，在  $A$  隨高度呈綫性分佈的假定下，我們有

$$\frac{\partial A}{\partial p} = -\frac{1}{350} \text{mb}^{-1} = \text{const}.$$

因為在  $p = p_m$  處， $A = 0$ ，所以，在我們所考慮的大氣中  $A = \frac{1}{350} (p_m - p)$ ，上式要滿足  $(A)_m = 0$  的條件，必須  $p_m = 600\text{mb}$ 。以後我們就取這個數值。這樣，我們不難求得

$$(A^2)_m = 0.4080 \approx \frac{1}{3}; \quad \alpha = -0.6339; \quad \beta = 0.5051;$$

$$\Gamma = 0.3846; \quad c = -0.6933; \quad a = 0.1811 \approx \frac{1}{6};$$

$$b = -0.0899 \approx \frac{-1}{11}; \quad \frac{1}{1-c} = 0.5905 \approx \frac{1}{2}.$$

這裏我們取  $d=700$  公里,  $m=1$ ,  $g=9.8$  米/秒<sup>2</sup>,  $\sigma_e=25 \times 10^{-4}$  米/毫巴<sup>2</sup>;  $f=10^{-4}$  秒<sup>-1</sup>.

上面決定常數的方法是很粗糙的,可能很不合式。如果我們有大量的實際資料,用適當的統計方法來定也許還更好些。譬如 Eliassen<sup>[8]</sup> 對整個大氣積分就取  $(A^2)_m=0.65$ 。

姑且不管這些情況,把上面求得的數值代入方程(7)和(11)中,注意  $\bar{V}_T \cdot \nabla \eta_T = \bar{V}_T \cdot \nabla \xi_T$ ,經過整理並略去較小的項,我們可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} (\xi_m + \xi_T) = - \left( \bar{V}_m + c_g + \frac{1}{6} \bar{V}_T \right) \cdot \nabla (\xi_m + \xi_T), \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_T = - (\bar{V}_m + c_g) \cdot \nabla \xi_T. \quad (13)$$

因為一般預報台站不分析 600mb 圖,我們還必須用 AT500 和 OT<sub>1000</sub><sup>500</sup> 圖。按前面的假定,不難得到  $\bar{V}_m = \bar{V}_5 - \frac{2}{7} \bar{V}_T$ ,  $\xi_5 = \xi_m + \frac{2}{7} \eta_T$ 。所以,方程(12),(13)在相當精確的程度內可以寫作

$$\frac{\partial}{\partial t} (\xi_m + \xi_T) = - (\bar{V}_5 + c_g) \cdot \nabla (\xi_m + \xi_T), \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_T = - \left( \bar{V}_5 + c_g - \frac{1}{4} \bar{V}_T \right) \cdot \nabla \xi_T, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi_5 = \frac{\partial \xi_m}{\partial t} + \frac{1}{4} \frac{\partial \xi_T}{\partial t}. \quad (16)$$

這樣,我們就得到了兩個具有保守量  $\frac{1}{2} \xi_m + \xi_T$  的方程式。

因此,給定  $\xi_5$ ,  $\xi_T$  的起始分佈,利用(14),(15),(16)三式,我們可以求得時間間隔  $\Delta t$  後的  $\Delta \xi_5$  和  $\Delta \xi_T$  的分佈,按 Fjórtoft 的圖解積分公式<sup>[10]</sup> 不難求得和它們相當的變高  $\Delta z_5$  及變厚  $\Delta h$ ,因而也可以求得  $\Delta t$  時間後的  $z_5$  場和  $h$  場。因為

$$\Delta \xi_T = \Delta \left( \frac{1}{2} \bar{h} - h \right),$$

即

$$\Delta h - \frac{1}{2} \bar{h} = - \Delta \xi_T. \quad (17)$$

按照 Fjórtoft,在自由邊界條件下,差分方程(17)的解可以用無窮級數

$$\Delta h = - \left[ \Delta \xi_T + \frac{1}{2} \overline{\Delta \xi_T} + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \overline{\overline{\Delta \xi_T}} + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^L \overline{\overline{\overline{\Delta \xi_T}}} + \dots \right] \quad (18)$$

來表示,其中  $\overline{\overline{\overline{\Delta \xi_T}}}$  表示連續作  $L$  次空間平均 ( $\overline{\quad}$ ) 運算,每次所取的  $d$  都相同。如果我們取(18)式右端的前兩項作為  $\Delta h$  的近似解,則對於單一的波,  $\Delta h$  的相對誤差  $E$  是:

$$E = \frac{1}{4} A_{m,n}^2,$$

其中  $A_{m,n} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{2\pi d}{\lambda_m} + \cos \frac{2\pi d}{\omega_n} \right)$ ,  $\lambda_m$ ,  $\omega_n$  各是沿  $x$  和  $y$  方向的波長。

對於不同的波長,  $E$  的數值如下:

表 1

波 長	4d	5d	6d	7d	8d	9d	10d
$E \times 100\%$	0	2	6	10	12.6	14.7	16.4

所以,在  $4d \leq \lambda_m, \omega_n \leq 10d$  的範圍內,我們可以採用

$$\Delta h = - \left( \Delta \xi_T + \frac{1}{2} \overline{\Delta \xi_T} \right). \quad (19)$$

對於 Poisson 差分方程的近似解,按 Fjörtoft, 我們可以取

$$\Delta z = - (\Delta \xi_m + 2\overline{\Delta \xi_m}). \quad (20)$$

所以,重複這個過程  $n$  次,我們就可以得到  $t = t_0 + n\Delta t$  時間的  $z$  場和  $h$  場了。

方程(7)和(11)也可以用電子計算機來解。由於  $\bar{z}$  場和  $\bar{h}$  場比較恆定,其地轉風速遠比實際流場的小,我們可以把  $\Delta t$  取得適當地大。這樣就可以使工作量大大減少,同時在計算過程中引起的捨入誤差也可以顯著削弱。

這個方法還可以用來預報對流層下半部的平均垂直速度。因為,在  $\Delta t$  時間內,積分(10)式,我們有

$$\int_{\Delta t} \frac{\partial h}{\partial t} dt + \int_{\Delta t} (\mathbf{V}_m \cdot \nabla h) dt = \sigma_c (p_f - p_m) \int_{\Delta t} \omega^* dt, \quad (21)$$

如果令

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_m \cdot \nabla h)^* &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} (\mathbf{V}_m \cdot \nabla h) dt, \\ \omega^{**} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \omega^* dt, \end{aligned}$$

則(21)式可以改寫為

$$\Delta h + (\mathbf{V}_m \cdot \nabla h)^* \Delta t = (p_f - p_m) \sigma_c \omega^{**} \Delta t, \quad (22)$$

故

$$\omega^{**} = \frac{\Delta h + (\mathbf{V}_m \cdot \nabla h)^* \Delta t}{(p_f - p_m) \sigma_c \Delta t}. \quad (23)$$

在(23)式中,  $(\mathbf{V}_m \cdot \nabla h)^*$  可以用近似方法求出,譬如令它等於  $\frac{1}{2} [(\mathbf{V}_m \cdot \nabla h)_{t=t_0} + (\mathbf{V}_m \cdot \nabla h)_{t=t_0+\Delta t}]$ 。這樣  $\omega^{**}$  就可以算出,因而我們也可以用它來作天氣現象或雨量的預報了。

### 三. 二層模式的推廣

在二層模式中我們假定了

$$\mathbf{V}(x, y, p, t) = \mathbf{V}_m(x, y, t) + A(p) \mathbf{V}_T(x, y, t), \quad (3)$$

因而,水平風速的垂直切變可以表示作

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} = \mathbf{V}_T \frac{\partial A}{\partial p}, \quad (24)$$

在熱成風假定下,

$$-\frac{1}{p} \nabla T = \left( g \ln \frac{p_f}{p_m} \right) \frac{\partial A}{\partial p} \nabla T_m, \quad (25)$$

其中  $T$  是虛溫,  $T_m$  是等壓面  $p_m$  和  $p_f$  之間的平均虛溫. 因為在中緯度地帶,  $A(p)$  一般是隨高度增加的(即隨氣壓減小),  $\nabla T$  的方向總和  $\nabla T_m$  的方向相同; 所以, 根據(3)式, 我們有  $\mathbf{V} \cdot \nabla T = \mathbf{V}_m \cdot \nabla T$ , 即對流層中溫度平流的符號應該是上下一致的; 並且, 熱成風的方向還隨高度不變. 這些現象和觀測事實是不完全一致的. 爲了更清楚地表示大氣的垂直結構, 我們把(3)式中的  $\mathbf{V}_T$  表示成

$$\mathbf{V}_T = \begin{cases} A_1(p)\mathbf{V}_1(x, y, t), & \text{當 } p_2 \leq p \leq p_m, \\ A_2(p)\mathbf{V}_2(x, y, t), & \text{當 } p_m \leq p \leq p_0. \end{cases} \quad (26)$$

所以

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_m + \zeta_T, \\ \zeta_T &= \begin{cases} B_1\zeta_1, & \text{當 } p_2 \leq p \leq p_m, \\ B_2\zeta_2, & \text{當 } p_m \leq p \leq p_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

和前面一樣, 我們有

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}} &= \bar{\mathbf{V}}_m + \bar{\mathbf{V}}_T, \\ \bar{\mathbf{V}}_T &= \begin{cases} B_1\bar{\mathbf{V}}_1, & \text{當 } p_2 \leq p \leq p_m, \\ B_2\bar{\mathbf{V}}_2, & \text{當 } p_m \leq p \leq p_0; \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\xi = \xi_m + \begin{cases} B_1\eta_1, & \text{當 } p_2 \leq p \leq p_m, \\ B_2\eta_2, & \text{當 } p_m \leq p \leq p_0; \end{cases} \quad (29)$$

這裏  $\zeta_1, \zeta_2$  各是相當於  $\mathbf{V}_1$  和  $\mathbf{V}_2$  的熱成風渦度;  $\eta_1 = \bar{h}_1 - h_1$ ,  $\eta_2 = \bar{h}_2 - h_2$ ;  $\bar{h}_1$  是在  $p_2 \leq p \leq p_m$  區間內某兩等壓面之間的厚度;  $\bar{h}_2$  是在  $p_m \leq p \leq p_0$  區間內某兩等壓面之間的厚度.

和前面一樣, 設在  $p = p_2$  和  $p = p_0$  處,  $\omega = 0$ , 對(2)式作從  $p = p_2$  到  $p = p_0$  的積分, 則

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial t} = -(\bar{\mathbf{V}}_m + \mathbf{c}_g) \cdot \nabla \xi_m - (A_1^2)_m \bar{\mathbf{V}}_1 \cdot \nabla \eta_1 - (A_2^2)_m \bar{\mathbf{V}}_2 \cdot \nabla \eta_2, \quad (30)$$

其中

$$(A_1^2)_m = \frac{1}{p_0 - p_2} \int_{p_2}^{p_m} A^2 dp; \quad (A_2^2)_m = \frac{1}{p_0 - p_2} \int_{p_m}^{p_0} A^2 dp.$$

用同樣方法對(2)式分別作從  $p_m \leq p \leq p_f$  和  $p_3 \leq p \leq p_m$  ( $p_2 < p_3 < p_m$ ) 區間內任一氣壓高度  $p$  到  $p_0$  和  $p$  到  $p_2$  的積分, 並分別用  $p_0 - p$  和  $p - p_2$  來除, 然後再分別對它們作從  $p_m$  到  $p_f$  和  $p_3$  到  $p_m$  的積分, 並分別用  $p_f - p_m$  和  $p_m - p_3$  來除, 最後再分別和(30)式相減, 我們可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_1}{\partial t} &= -(\bar{\mathbf{V}}_m + \mathbf{c}_g) \cdot \nabla \eta_1 - \bar{\mathbf{V}}_1 \cdot \nabla \xi_m - \frac{[\beta_1 - (A_1^2)_m]}{\alpha_1} \bar{\mathbf{V}}_1 \cdot \nabla \eta_1 + \\ &+ \frac{(A_2^2)_m}{\alpha_1} \bar{\mathbf{V}}_2 \cdot \nabla \eta_2 + \frac{\Gamma_1}{\alpha_1} \omega_1^*, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_2}{\partial t} &= -(\bar{\mathbf{V}}_m + \mathbf{c}_g) \cdot \nabla \eta_2 - \bar{\mathbf{V}}_2 \cdot \nabla \xi_m - \frac{[\beta_2 - (A_2^2)_m]}{\alpha_2} \bar{\mathbf{V}}_2 \cdot \nabla \eta_2 + \\ &+ \frac{(A_1^2)_m}{\alpha_2} \bar{\mathbf{V}}_1 \cdot \nabla \eta_1 - \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} \omega_2^*, \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$\Gamma_1 = \left[ \frac{1}{p_m - p_3} \int_{p_3}^{p_m} \frac{4gm^2(p - p_2)}{f^2 d^2} dp \right]^{-1}; \quad \omega_1^* = \frac{1}{p_m - p_3} \int_{p_3}^{p_m} \omega_1 dp;$$

$$\alpha_1 = \frac{4gm^2 \Gamma_1}{f^2 d^2 (p_m - p_3)} \int_{p_3}^{p_m} \int_{p_2}^p A dp dp;$$

$$\beta_1 = \frac{4gm^2 \Gamma_1}{f^2 d^2 (p_m - p_3)} \int_{p_3}^{p_m} \int_{p_2}^p A^2 dp dp;$$

$$\Gamma_2 = \left[ \frac{1}{p_f - p_m} \int_{p_m}^{p_f} \frac{4gm^2(p_0 - p)}{f^2 d^2} dp \right]^{-1}; \quad \omega_2^* = \frac{1}{p_f - p_m} \int_{p_m}^{p_f} \omega_2 dp;$$

$$\alpha_2 = \frac{4gm^2 \Gamma_2}{f^2 d^2 (p_f - p_m)} \int_{p_m}^{p_f} \int_p^{p_0} A dp dp;$$

$$\beta_2 = \frac{4gm^2 \Gamma_2}{f^2 d^2 (p_f - p_m)} \int_{p_m}^{p_f} \int_p^{p_0} A^2 dp dp;$$

$\omega_1, \omega_2$  各是在  $p_3 \leq p \leq p_m$  和  $p_m \leq p \leq p_f$  區間內任一高度的垂直速度。

和二層模式中的做法一樣，引進絕熱方程(9)，並分別作  $p = p_3$  到  $p = p_m$  和  $p = p_m$  到  $p = p_0$  的積分，我們得到

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_m \cdot \nabla \right) h_1 - \sigma_1 (p_m - p_3) \omega_1^* = 0, \quad (33)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_m \cdot \nabla \right) h_2 - \sigma_2 (p_f - p_m) \omega_2^* = 0, \quad (34)$$

其中  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  都是常數。把(31)和(32)式代入方程(29)和(30)，整理後我們得到

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = - (\bar{\mathbf{V}}_m + \mathbf{c}_g) \cdot \nabla \xi_1 - \bar{\mathbf{V}}_1 \cdot \nabla (a_1 \xi_m + b_1 \eta_1) + v_1 \bar{\mathbf{V}}_2 \cdot \nabla \eta_2; \quad (35)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = - (\bar{\mathbf{V}}_m + \mathbf{c}_g) \cdot \nabla \xi_2 - \bar{\mathbf{V}}_2 \cdot \nabla (a_2 \xi_m + b_2 \eta_2) + v_2 \bar{\mathbf{V}}_1 \cdot \nabla \eta_1; \quad (36)$$

其中

$$\xi_1 = \frac{1}{1 + c_1} \bar{h}_1 - h_1; \quad a_1 = \frac{1 - c_1}{1 + c_1}; \quad b_1 = \frac{\beta_1 - (A_1^2)_m}{(1 + c_1)\alpha_1};$$

$$\xi_2 = \frac{1}{1 - c_2} \bar{h}_2 - h_2; \quad a_2 = \frac{1 + c_2}{1 - c_2}; \quad b_2 = \frac{\beta_2 - (A_2^2)_m}{(1 - c_2)\alpha_2};$$

$$v_1 = \frac{(A_2^2)_m}{(1 + c_1)\alpha_1}; \quad v_2 = \frac{(A_1^2)_m}{(1 - c_2)\alpha_2};$$

$$c_1 = \frac{\Gamma_1}{\alpha_1 \sigma_1 (p_m - p_3)}; \quad c_2 = \frac{\Gamma_2}{\alpha_2 \sigma_2 (p_f - p_m)}.$$

因此，在地轉近似下，(30)，(35)，(36)三式組成了閉合的預報  $\xi_m, \xi_1$  和  $\xi_2$ ，或  $z_m, h_1$  和  $h_2$  的偏微分方程組。

現在，我們來決定這三個方程中常數的值。按照前面的假設，在現在的情況下，熱成風隨高度的分佈可以不受像在二層模式中那樣的限制，為方便起見，我們不妨取  $p_m = 500\text{mb}$ ， $p_0 = 1000\text{mb}$ ， $p_2 = 200\text{mb}$ ， $p_3 = 300\text{mb}$ ， $p_f = 850\text{mb}$ ；選擇 300mb 到 500mb 的厚度為  $h_1$ ，500mb 到 850mb 的厚度為  $h_2$ ，則在  $p = p_m$  處， $A_1(p) = A_2(p) = 0$ ；在  $p = 300\text{mb}$  處， $A_1(p) = 1$ ；在  $p = 850\text{mb}$  處， $A_2(p) = -1$ 。和二層模式的情況一樣，在綫性假定下，我們可以求得

$$\begin{aligned} (A_1^2)_m &= 0.281 \approx \frac{1}{4}; & (A_2^2)_m &= 0.408 \approx \frac{1}{2}; & \alpha_1 &= 1.04; & \beta_1 &= 1.04; \\ \Gamma_1 &= 0.63; & c_1 &= 0.865; & a_1 &= 0.072 \approx \frac{1}{14}; & b_1 &= 0.39 \approx \frac{2}{5}; \\ v_1 &= 0.21 \approx \frac{1}{5}; & \alpha_2 &= -0.92; & \beta_2 &= 0.86; & \Gamma_2 &= 0.39; & c_2 &= -\frac{1}{2}; \\ a_2 &= \frac{1}{3}; & b_2 &= -0.328 \approx -\frac{1}{3}; & v_2 &= -0.2 = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

這裏我們取  $\sigma_1 = 35 \times 10^{-4}$  米/毫巴<sup>2</sup>;  $\sigma_2 = 25 \times 10^{-4}$  米/毫巴<sup>2</sup>; 其他數值和在二層模式中的一樣。

所以, 如果我們略去較小的項, 則(30), (35), (36)三式可以寫作

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial t} = -(\bar{V}_m + c_g) \cdot \nabla \xi_m - \frac{1}{4} \bar{V}_1 \cdot \nabla \xi_1 - \frac{1}{2} \bar{V}_2 \cdot \nabla \xi_2, \quad (37)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = -(\bar{V}_m + c_g) \cdot \nabla \xi_1 - \frac{2}{5} \bar{V}_1 \cdot \nabla \xi_1 + \frac{1}{5} \bar{V}_2 \cdot \nabla \xi_2, \quad (38)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = -(\bar{V}_m + c_g) \cdot \nabla \xi_2 - \frac{1}{3} \bar{V}_2 \cdot \nabla (\xi_m - \xi_2) - \frac{1}{5} \bar{V}_1 \cdot \nabla \xi_1, \quad (39)$$

其中

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \bar{h}_1 - h_1, \quad \xi_2 = \frac{2}{3} \bar{h}_2 - h_2.$$

和前面一樣, 我們也可以求出垂直速度的預告方程

$$\omega_1^{**} = \frac{\Delta h_1 + (\bar{V}_m \cdot \nabla h_1)^* \Delta t}{(p_m - p_3) \sigma_1 \Delta t}, \quad (40)$$

$$\omega_2^{**} = \frac{\Delta h_2 + (\bar{V}_m \cdot \nabla h_2)^* \Delta t}{(p_f - p_m) \sigma_2 \Delta t}, \quad (41)$$

其中

$$(\bar{V}_m \cdot \nabla h_1)^* = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} (\bar{V}_m \cdot \nabla h_1) dt;$$

$$(\bar{V}_m \cdot \nabla h_2)^* = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} (\bar{V}_m \cdot \nabla h_2) dt;$$

$$\omega_1^{**} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \omega_1^* dt; \quad \omega_2^{**} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \omega_2^* dt.$$

爲了檢驗三層模式的預報能力, 根據方程(37)我們用1956年2月25日15時(世界時)500mb圖(圖1)作了一張12小時預告圖(圖2)。在計算時我們取  $\Delta t = 12$  小時。這是一個相當難報的例子, 過去用二層模式根據圖1作的24小時預告圖<sup>[2]</sup>, 其相關係數只有0.36。由於預報的時限不同, 圖2和它雖不能相比, 但是就實況(圖3)來看, 圖2還是比較令人滿意的。譬如, 裏海以北的大低壓槽, 新西伯利亞的新生高壓中心, 黑龍江以北的高壓中心的位置, 形狀和強度等都和實況相近, 只是蒙古人民共和國東部的低壓中心報得太強了。從這些情況, 我們估計, 利用方程(37), (38), (39)作出的24小時預報, 其結果可能不會太壞。



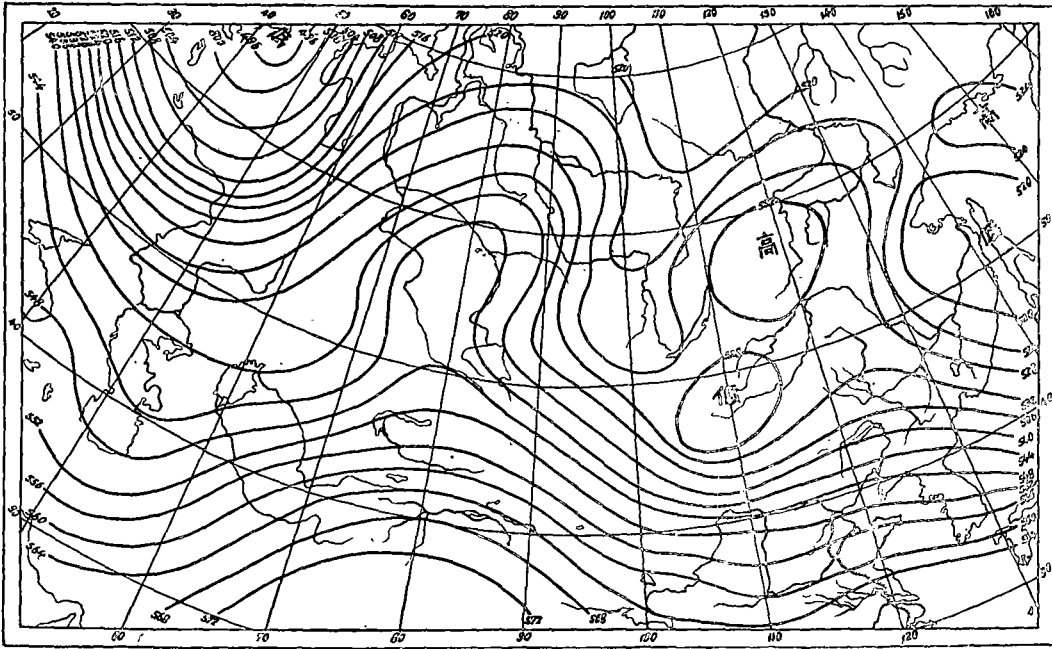


圖 1. 1956年2月25日15時(世界時) 500mb 圖

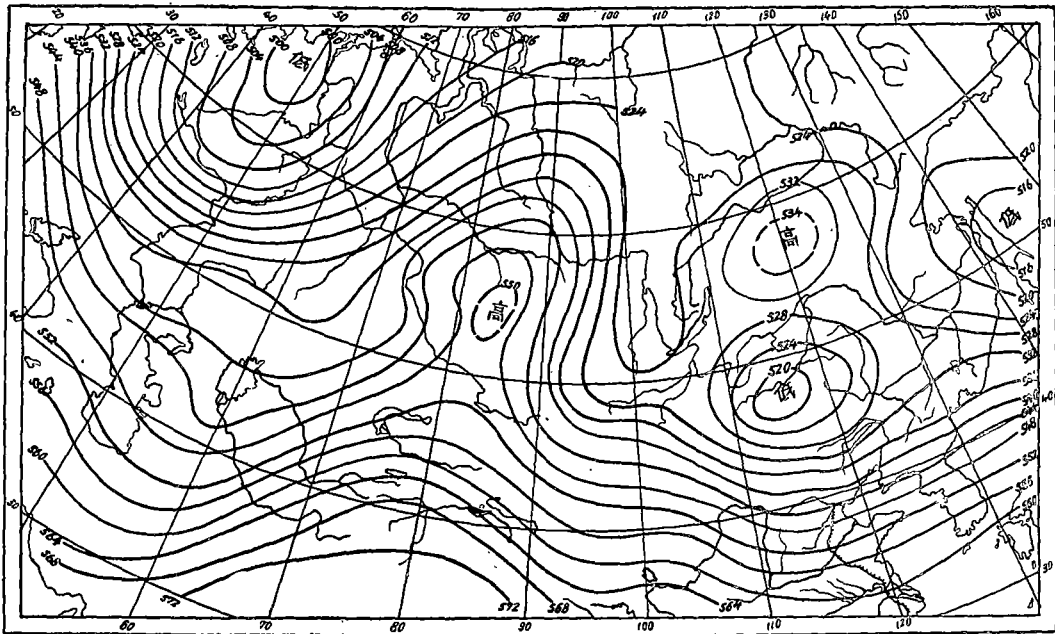


圖 2. 1956年2月26日03時(世界時) 500mb 預告圖

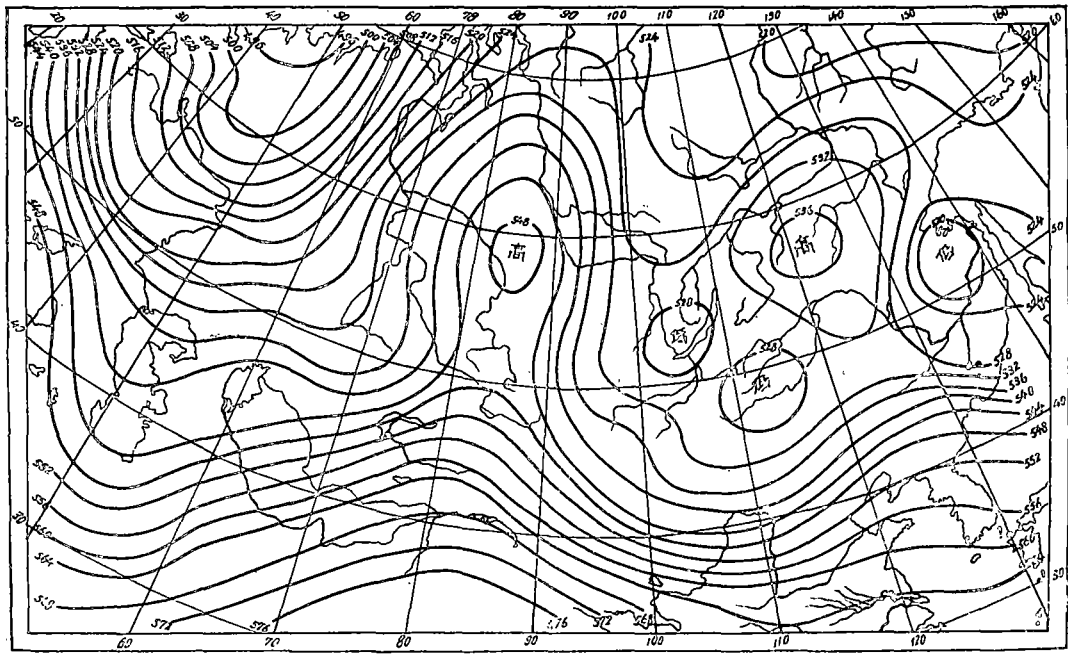


圖 3. 1956 年 2 月 26 日 03 時(世界時) 500mb 圖(實況)

#### 四. 關於積分預報方程的一些問題

前面我們求出的預報方程,只給出了  $\xi_m$  和  $\xi_T$  等的瞬時局地變化,要求出與它們相應的  $\frac{\partial z_m}{\partial t}$  和  $\frac{\partial h}{\partial t}$  等,以及某預報時限後的高度場和厚度場,我們還必須對這些方程進行積分. 目前,進行這工作的方法有兩種,即用數值計算的方法和圖解積分法. 現在,我們來分別加以討論.

首先,我們考慮圖解積分的問題. 在 Fjørtoft 的文章<sup>[10]</sup>裏曾提到  $\bar{z}$  場隨時間的變化比  $z$  場要慢得多,當時間間隔  $\Delta t$  小於 24 小時時,我們可以把它看作恆定的. 但是,它的恆定程度如何,在他的文章裏卻沒有說明. 其實,在他的理論中已暗含有這方面的討論,現在,我們就來加以闡明. 設  $\Delta z$  可以表示作

$$\Delta z = \sum^{l_N} a_{m,n} e^{2\pi i(K_m x + \mu_n y)} + C \quad (42)$$

則

$$\bar{\Delta z} = \sum^{l_N} A_{m,n} a_{m,n} e^{2\pi i(K_m x + \mu_n y)} + C. \quad (43)$$

這裏  $l_N$  是最短波長,  $A_{m,n}$  的意義同前,  $K_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}$ ,  $\mu_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ . 因為,在相當大的區域內我們可以把總的質量看作常數<sup>[4]</sup>,即視總的變高為零,因而,對(42)式施以  $\frac{1}{S} \int_{\sigma} ( ) dx dy$  運算(這裏  $S$  是區域的面積,  $\sigma$  是積分區域,  $dx dy$  是面積元素),則  $C \approx 0$ . 因此,考慮單一的波,我們有

$$\bar{\Delta z}_{m,n} = \Delta \bar{z}_{m,n} = A_{m,n} \Delta z_{m,n}, \quad (44)$$

所以,當  $\lambda_m, \omega_n = 4d$  時,  $\Delta \bar{z}_{m,n} = 0$ ; 當  $3d \leq \lambda_m, \omega_n \leq 6d$  時,  $\Delta \bar{z}_{m,n} = \frac{1}{2} \Delta z_{m,n}$ . 顯然,這時  $\bar{z}$  場比  $z$  場恆定. 在  $d = 700$  公里或  $1000$  公里的情形,  $6d$  相當於  $4200$  公里或  $6000$  公里. 在大氣中大多數波的波長都小於  $4200$  公里,最大的也不過  $6000$  公里左右. 這說明了爲什麼 Estoque 取  $d = 1000$  公里作的推移場相當恆定的原因. 從實際情況來看,根據統計<sup>[3]</sup>,在  $500\text{mb}$  圖上,取  $d = 600$  公里,一般  $24$  小時變高中心強度約爲對應的平均變高中心強度的二倍;用  $\bar{z}$  場作推移場,在  $12$  小時內引起的渦度平流的誤差是很小的. 在這方面,增田曾得出過同樣的結果<sup>[12]</sup>. 可見,前面的分析還是接近真實情況的.

因此,在圖解計算中,在比較短的時間(如小於  $24$  小時)內我們可以用 Fjörtoft 處理一層模式的方法來處理方程(14)和(15).

現在,我們來考慮數值積分的問題.

我們知道,解預報方程(7), (11)或(30), (35), (36)不僅須要知道  $z_m$  和  $h$  的起始分佈,還須要給出一定的邊界條件. 可是,在大氣中,除了上下的邊界外,沒有理想的如一般物理問題的固定邊界條件,它們總是隨時間在變,而它們的變化規律我們又不知道,這給我們求解帶來了很大困難. 因此,如何規定這些條件,使因之而引起的誤差達到最小是我們需要解決的問題. 設我們要解的差分方程是

$$\begin{cases} \tau_{ij} = a\bar{\tau}_{ij} - G_{ij}, & (0 < a \leq 1) \\ \tau_{ij}|_{\Gamma} = \varphi_{ij}, \end{cases} \quad (45)$$

$$\tau_{ij}|_{\Gamma} = \varphi_{ij}, \quad (46)$$

其中  $\tau_{ij}$  代表變高或變厚;  $G_{ij}$  和  $\varphi_{ij}$  是已知的  $x$  和  $y$  的函數;  $i, j$  各是沿  $x$  和  $y$  方向的網格點的數目,  $i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m, m, n$  不一定相等;  $\Gamma$  是計算區域  $R$  的網格邊界,  $\tau_{ij}|_{\Gamma}$  表示  $\Gamma$  上真正的  $\tau_{ij}$  的值. 因爲我們不知道在  $\Gamma$  上真正的  $\tau_{ij}$  的數值,爲了求解的需要,不妨假定

$$\tau_{ij}^*|_{\Gamma} = \psi_{ij}, \quad (47)$$

這裏  $\tau_{ij}^*$  表示不是真正的  $\tau_{ij}$  的意思;  $\psi_{ij}$  是已知的  $x$  和  $y$  的函數.

設用(46)式求得的方程(45)的解是  $\tau_{ij}$ , 用(47)式求得的解是  $\tau_{ij}^*$ , 令

$$v_{ij} = \tau_{ij} - \tau_{ij}^*, \quad (48)$$

$$v_{ij}|_{\Gamma} = \varphi_{ij} - \psi_{ij} = \Phi_{ij}, \quad (49)$$

代入(45)式,則有

$$v_{ij} = a\bar{v}_{ij}, \quad (50)$$

$$v_{ij}|_{\Gamma} = \Phi_{ij}. \quad (51)$$

根據最大值原理,當  $a < 1$  時(在我們的模式中這條條件是滿足的),以  $\Gamma$  爲邊界的區域  $R$  內部的解  $v_{ij}$  不可能在  $R$  內部達到正的極大或負的極小,也就是說  $v_{ij}$  的絕對值的最大只可能在邊界上達到. 所以,邊界上的誤差直接影響計算區域內部的誤差. 如果邊界上的誤差小,計算區域內部的誤差更小. 根據這個原則,我們提出兩個選取邊界條件的辦法:

1. 以整個北半球作爲預報區域,適當選取副熱帶高壓北部一條緯綫(譬如說  $20^\circ\text{N}$  綫)作爲邊界;在邊界上設  $\tau_{ij} = 0$ . 這樣作的好處是:根據統計,在這地帶,  $z_m, h$  和  $h_i$  等 ( $i=1, 2$ ) 的局地變量一般都小於  $40$  米/日,因此,整個計算區域內的誤差也小於  $40$  米/日,並且,由於這地帶的實際變高(或變厚)的分佈大都是正負相間的,誤差(即  $v_{ij}$ ) 向  $R$  內部

隨距邊界的距離迅速減小，在中心附近接近於零。

2. 邊界不固定，通過  $\xi_m$ ,  $\eta_T$  (或  $\eta_i$  等,  $i = 1, 2$ ) 等值綫的推移，以求出的  $G_{ij}$  (即各不同形式的  $\xi_m$  或  $\xi_T'$  的平流項的和) 存在區域的外圍作為邊界；在邊界上按一定關係規定邊界條件；這又可以分為兩種：

a) 按照(44)式，對於單一的波我們有

$$\tau_{ij} = - (1 - aA_{m,n}) G_{ij}, \quad (52)$$

對於一定的波長， $1 - aA_{m,n}$  的數值是固定的。因為  $\tau_{ij}$  的波長和  $G_{ij}$  的是一樣的，我們可以根據後者的分佈按(52)式規定邊界上  $\tau_{ij}$  的值。當然，我們也可以按這關係式來取零次近似值。

b) 按照 Fjörtoft 解 Poisson 方程和 Helmholtz 方程的圖解積分公式來規定邊界上  $\tau_{ij}$  的值\*。同樣，也可以用這關係來取  $R$  內部  $\tau_{ij}$  的零次近似值。根據經驗，這樣作，收斂速度是很快的。

c) 設在邊界上， $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t}$  隨時間不變，根據過去的天氣圖，求出邊界上的  $\tau_{ij}$ 。

選好邊界條件後，根據它和  $G_{ij}$  的分佈，我們不難用數值計算的方法(如鬆馳法、疊代法等)解出  $\tau_{ij}$  的分佈。

但是，要求出預報時限  $T (= n\Delta t)$  後  $\tau_{ij}$  的分佈，對於固定的邊界，除了須要規定  $\tau_{ij}$  的數值外，還須要規定  $\xi_m$  和  $\xi_T'$  等隨時間的變化。過去，Charney 等<sup>[7]</sup> 在解一層模式的預報方程時曾經規定：在邊界上流體進入  $R$  的地方，絕對渦度的局地變化為零；在流體離開  $R$  的地方，絕對渦度的局地變化由其內部的局地變化按綫性外推決定。1954 年 Platzman<sup>[13]</sup> 指出，對簡單的一度問題，這個作法是不對的。在簡單的一層模式中，它會導致計算的不穩定；如果令整個邊界上絕對渦度的局地變化等於零，則計算是穩定的。現在，我們就不妨令邊界上  $\xi_m$  和  $\xi_T'$  隨時間的變化為零，即

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial t} = \frac{\partial \xi_T'}{\partial t} = 0.$$

事實上，在大氣中，除了有熱帶風暴等天氣系統活動的情況，在我們所選擇的固定邊界(如  $20^\circ N$  緯綫)上，這個規定一般還是和實況接近的。

現在，剩下的問題是：求出預報時限  $T$  後  $z$  或  $h$  的分佈。

如果令  $\tau_{ij}$  代表  $\frac{\partial z_{ij}}{\partial t}$ ，則  $\Delta t$  時間後的  $z$  值可由

$$(z_{ij})_{t=t_0+\Delta t} = (z_{ij})_{t=t_0-\Delta t} + 2\Delta t \left( \frac{\partial z_{ij}}{\partial t} \right)_{t=t_0}$$

來決定。不過，在第一個時間步長，由於高空圖一般要 12 小時才有一張，如時間間隔較小，則  $(z_{ij})_{t=t_0-\Delta t}$  的數值不可能從圖上求出；這時，按照慣例，我們可以用向前差的辦法，或者，根據過去的高空圖，用內插法來確定。

必須提出，用有限差分法求解，誤差  $v_{ij}$  從邊界向區域  $R$  內部傳播的速度是與網格大小  $d$  有關的。譬如，在  $a < 1$  的情形，從方程(50)，我們有

$$v_{ij} = a\bar{v}_{ij} = \frac{a}{4} (v_{i-1,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i,j+1}). \quad (53)$$

\* 但這時邊界要向內縮進一格距離  $d$ 。

不失去普遍性，設我們所考慮的區域  $R$  是一個長方形，在邊界上最大誤差的絕對值為  $E_0$ ，那麼，對於  $R$  內鄰近邊界的第  $r$  行來說，不難看出，其最大誤差  $v_r$  有

$$|v_r| \leq a^r E_0 < E_0, \quad (54)$$

所以，愈接近  $R$  的中心， $|v_r|$  愈小。

因此，我們可以根據這個關係來確定在一定精確度內不受到邊界誤差影響的範圍。如我們所要求的精確度，即容許誤差是  $E$ ，那麼，要滿足不等式

$$a^r E_0 < E,$$

只須我們去掉區域  $R$  內從邊界  $\Gamma$  起到第  $r$  行或列的地帶就夠了。剩下的就是我們需要的區域。

當然，在作數值計算時，我們還必須把  $d$  取得比在用圖解法計算時小些。

最後，作者對朱和周先生的幫助和鼓勵，以及岸保博士和丑紀範、廖翔雲同志提出的許多寶貴意見表示衷心的感謝。陳世祺同志幫助計算，也一併致謝。

### 參 考 文 獻

- [1] 廖洞賢：簡化的兩個參數模型的圖解數值預報。氣象學報，27(1956)，153—166。
- [2] 廖洞賢、單紀平、單章：準地轉兩層模式天氣數值預告方法的試驗。氣象學報，28(1957)，41—62。
- [3] 丑紀範、廖翔雲：Fjørtoft 圖解法的某些統計研究。氣象學報，29(1958)，24—32。
- [4] 廖洞賢：圖解數值預告法的綜合報告(1952—1957)，天氣分析教材集，中央氣象局幹部輪訓班。
- [5] Árnason, G., A baroclinic model of the atmosphere applicable to the problem of numerical forecasting in three dimensions. I. *Tellus*, 4 (1952), 356—373.
- [6] Charney, J. G., On a physical basis for numerical prediction of large-scale motions in the atmosphere. *J. Meteor.*, 6 (1949), 371—385.
- [7] Charney, J. G., Fjørtoft, R. and Neumann, J. V., Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, 2 (1950), 237—254.
- [8] Eliassen, A., Simplified models of the atmosphere, designed for the purpose of numerical weather prediction. *Tellus*, 3 (1952), 145—156.
- [9] Eliassen, A., A procedure for numerical integration of the primitive equations of the two parameter model of the atmosphere. *Dept. of Meteo., U.C.L.A., Scientific Report*, No. 4. 1956.
- [10] Fjørtoft, R., On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation. *Tellus*, 3 (1952), 179—194.
- [11] Fjørtoft, R., On the use of space-smoothing in physical weather forecasting. *Tellus*, 7 (1955), 462—480.
- [12] Masuda, Y. (稻田洋信), On a graphical integration of the barotropic vorticity equation and its application to the numerical weather forecast. *J. Meteor. Soc. Japan*, Ser. II, 33 (1955), 280—290.
- [13] Platzman, G. W., The computational stability of boundary conditions in numerical integration of the vorticity equation. *Archiv f. Meteor., Geophy. u. Bioklima.*, Ser. A, 7 (1954), 29—40.
- [14] Sawyer, J. S. and Bushby, F. H., A baroclinic model atmosphere suitable for numerical integration. *J. Meteo.*, 10 (1953), 54—59.
- [15] 胡祖熾：計算方法論義，1957。

## A SIMPLE TWO-LAYER MODEL AND ITS EXTENSION

LIAO TUNG-HSIEN

*(Central Institute of Meteorological Research, Central Weather Bureau)*

### ABSTRACT

A two-layer model both applicable to graphical integration and numerical computation is proposed. From this model the height of 500 mb surface and the thickness between a certain selected isobaric surface in the vicinity of the top of friction layer and 500 mb surface can be forecasted. An extended model involving three layers is also designed. In designing them, no prescription with regard to the distribution of vertical velocity is made.

Finally, the steadiness of space mean velocity field and the selection of lateral boundary conditions are discussed.