第32卷 第4期　　气象学报　　Vol. 32, No. 4
1962年12月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Dec., 1962

起伏条件下云雾的重力碰并生长*

顧震潮　詹麗珊
(中国科学院地球物理研究所)

提　　要

云雾中的气象要素和云雾物理量經常有着起伏，因此研究重力碰并在这种起伏条件下如何使云滴生长，从而形成滴譜，是很必要的. 本文对云中小水滴浓度（或含水量）有起伏时的云雾滴生长进行了計算，得到了云滴的一种理論分布. 由此可以看出，在起伏条件下，云滴生长是比較快的. 在比較短的时間和比較薄的云中有可能形成相当大的云滴，卽半径 50μ 乃至 100μ 以上的云滴. 因此在均匀条件下，凝結生长和重力碰并增长中的所謂“生长障碍”区（云滴半径在 20—30μ 左右）也就不存在.

一、問題的提出

通过多年的云雾物理观测和研究，云雾滴譜的特性和发展規律的实际情况已得到初步的了解. 然而，到現在为止，这方面有好些問題并沒有得到充分的理論解释，也就是說，人們还不能由已知的云雾物理机理很好的說明云雾滴譜的形成和它的全部特征. 一般說来，至少有下面一些問題还沒有足够的理論說明：

1. 在半径 15—30μ 的范围中云滴的凝結增长已經很緩慢，而重力碰并增长的作用又不大，云滴如何能够比較迅速的生长而通过这个阶段.

2. 与此有关的是，云中如何很快的会形成大云滴（降水胚滴）和降水，特别是在暖云中它如何很快的形成？同样，比較薄的云中如何会形成大云滴和降水.

这些問題牽涉到云滴生长，也牽涉到降水过程. 但从滴譜理論来看，都是“寬譜”如何迅速形成的問題.

近年来的理論研究已經可以証明，在均匀条件下云滴譜是狹的. 过飽和水汽密度有起伏时凝結增长所形成的譜要寬許多. 但对于比較大的云滴（半径 15—20μ 以上）仍然是浓度不够的[1]. 特别是浓度分布偏态与实况相反. 湍流扩散碰并可能使半径在这段中的云滴生长得快一些，但比起重力碰并来也并不是經常很有效的. 至于电碰并的作用研究还不够. 因此，暂时也还不能对这个問題的解决有很大帮助.

在重力碰并方面近年来虽然有一些工作說明云滴在重力碰并下也可能长得很快. 但是，这些工作都有一些严重的問題. 例如 Telford[2] 所算得的云滴譜中已經毫无重力碰并的痕迹，这是难于理解的. 又如 Welander[3] 的工作尽管自己認为理論上的云滴譜与实际观测到的一些滴譜比較符合，其实所描写的物理过程特征与碰并过程特征完全相反，因而只能認为是錯誤的[1]. 因此，問題并沒有得到解决.

* 本文1962年5月16日收到.

然而重力碰并是比較基本的云滴生长过程. 它是經常起作用的. 进一步的考虑可以看出重力碰并下云滴生长的速度还可以更快些. 問題就在于云中物理量是經常起伏的，而正如凝結生长的情况一样，在起伏条件下云滴的重力碰并生长可能加快許多. 因此本文針对起伏条件下重力碰并形成云雾滴譜的問題进行一些統計的分析.

二、理論計算

为簡单起見，我們这里假定所研究的云是双分散的. 大部分云滴是半径 r' 的小云滴，但其中另有小部分比較大一些的云滴(半径 r_0). 那末根据重力碰并理論，云滴的生长率是:

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{Env}{4} \cdot V. \tag{1}$$

V 是水滴的末速，v 是較小云滴的体积，n 是較小云滴的浓度，E 是捕获系数. 这边省掉了較小水滴的末速 V'. 这对生长到很大的水滴所需要的时間有一些影响，但对所形成的滴譜影响不大.

由于云中較小水滴有浓度起伏，因此，在碰并发展过程中，較大云滴碰小水滴的碰撞率在各时間是不同的. 假定碰到較小水滴的过程完全是随机的，而浓度 n 又合乎正态分布

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\sigma_n^2}\right], \tag{2}$$

那末由(1)式

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{V} = \frac{Ev}{4}\int_{t_0}^{t} n dt. \tag{3}$$

为了求得 r 的譜密度 $F(r)$，需要知道 $V(r)$ 的关系，因而需要知道 $V(r)$ 的具体形式. 但一般文献中 $V(r)$ 的形式都是对 r 分段給出的，特别对于半径約在 $r = 50\mu$ 以上和以下的云滴末速，沒有用一个式子表式出来，而我們要討論一直到半径 100—200μ 的水滴，因此我們先找一个表示半径由 10μ 到 200μ 云滴的末速公式.

根据一般的末速半径經驗值[4]我們知道 r 小时，V 与 r^2 成正比，而 r 大时，V 約与 r 成正比. 同时，(2)式中我們要用的是 $1/V$，因此我們可取

$$r^2/V = A + Br. \tag{4}$$

根据 $V(r)$ 的半径經驗值对 r^2/V 作平方逼近，求出 A 与 B 来. 由此得到对 $10\mu \leqslant r \leqslant 200\mu$，$A = 5.5 \times 10^{-7}$，$B = 8 \times 10^{-5}$. 对于 $V_{12.6\mu}$ 到 $V_{10\mu}$，只比实测値大 15%，由均匀条件下重力碰并增长实例計算証明，在本文所給云中参数数值(見后文)下，由(4)式及給定 A，B 值所求出的均匀条件下云滴所长成的大小，与用 $V = 1.26 \times 10^6 r^2$ 所求出的云滴所长成的大小，在 $r < 50\mu$ 时，結果相差不超过 1μ.

由此得

$$A\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + B\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = Kn, \tag{5}$$

其中 $K = Ev(t - t_0)/4$，

$$\frac{dn}{dr} = \frac{1}{K}\left(\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r}\right). \tag{6}$$

根据对随机变数的函数求分布的方法[5]，可得到在重力碰幷下起始半径 r_0 的較大云滴在时間 $t-t_0$ 后长大到半径 r 的概率分布

$$p(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left(\frac{A}{r^2}+\frac{B}{r}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[A\left(\frac{1}{\tilde{r}}-\frac{1}{r}\right)+B\ln\frac{r}{\tilde{r}}\right]^2\right\}. \tag{7}$$

其中 $\sigma=\sigma_n K$，$\tilde{r}$ 是在均匀浓度下所应长到的云滴半径，即由

$$A\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{\tilde{r}}\right)+B\ln\frac{\tilde{r}}{r_0}=K\bar{n} \tag{8}$$

决定的 $\tilde{r}$. 这里假定了不同时間上遇到的 n 的相关系数等于 1.

容易看出，(7)式所决定的 $\tilde{r}$ 分布与均匀条件下的重力碰幷增长所达到的半径 $\tilde{r}$ 有着密切的关系. 一般說来在 $r=\tilde{r}$ 的两边 $p(r+\Delta r)<p(r-\Delta r)$，可見(7)式的分布中一大部分云滴长得比在均匀条件下更慢一些，而有一小部分却长得更快一些. 因此，一羣起始半径 r_0 的水滴不但可以长成不同的大小，形成一个多分散的滴譜，并且这譜还可以相当"寬". 而当时間不是太长的时候，最頻半径(众数半径)与 $\tilde{r}$ 相差不远. 进行数值計算时不必用(4)式，因而可以不限 $r<200\mu$ 的范围.

三、数値結果的討論

为了确切了解 r 的分布，我們作了一些数值計算.

取云內較小云滴半径 10μ，較大水滴半径 12.6μ (比 10μ 半径水滴体积大一倍)，$E=1/2$. 幷取下面几个例子. 考虑的对象主要是对流云.

	$\bar{n}$(个/厘米³)	σ_n	$t-t_0$(秒)	q(克/厘米³)
例 1	250	$\bar{n}/3$	2000	1
2	250	$\bar{n}/3$	2500	1
3	250	$\bar{n}/3$	3000	1
4	250	$\bar{n}/3$	4000	1
5	250	$\bar{n}/6$	4000	1

注意，为了計算的方便，(7)式指数部分方括号內的式子可改写成

$$A\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)+B\ln\frac{r}{r_0}-K\bar{n}.$$

容易看出，当 $\bar{n}/\sigma_n$ 比数不变时，同一 $\bar{n}(t-t_0)$ 或 $K\bar{n}$ 下的 $p(r)$ 分布是相同的. 所以例 1 相当于 $\bar{n}/\sigma_n=3$ 时 $\bar{n}=500$ 个/厘米³，$t-t_0=1000$ 秒，或 $\bar{n}=125$ 个/厘米³，$t-t_0=4000$ 秒的情形，余类推. 根据我們的观测，σ_n 很容易超过 $\bar{n}/4$.

計算的結果見图 1—5.

显然，开始时浓度的起伏幷不使形成的云滴大小有很大差异，譜不寬. 但在同样情况下，只是时間稍长一些(例 1)，形成的滴譜就大大加寬. 一般滴譜观测中只取几百个滴，因此测到的譜密度相差不会超过三个量級. 在图 1 中可看到，在这种情况下一般的滴譜观测大概可以看到有 $r=50\mu$ 的云滴. 但实际上这时已有不少 $r=100$—200μ 的大云滴存在. 如果原来 $r_0=12.6\mu$ 云滴浓度是 10 个/厘米³，那末大云滴的浓度这时已有几个/升. 这浓度是够大的. 特别因为云中較大水滴其实不只 $r=12.6\mu$ 一种. 理論計算証明，即使在凝結作用下也可以形成一定寬度的滴譜. 因此，考虑各种不同大小云滴的重

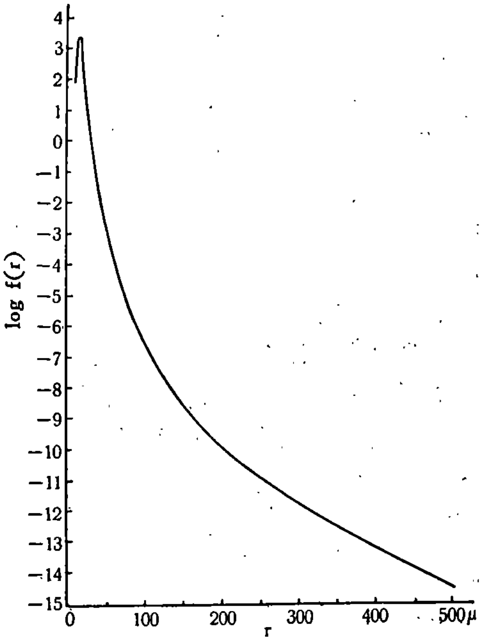

图 1

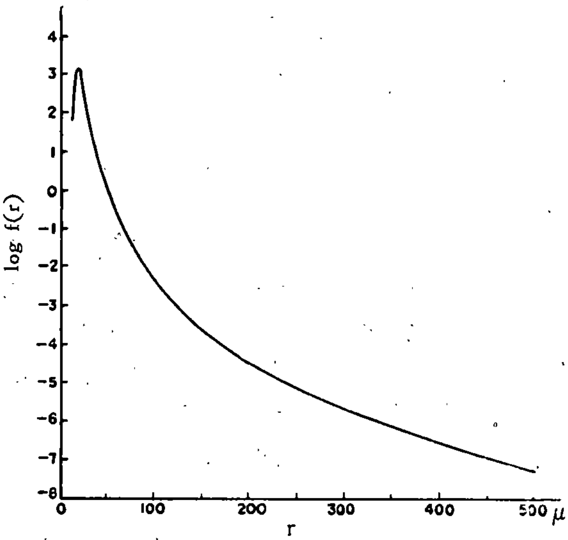

图 2

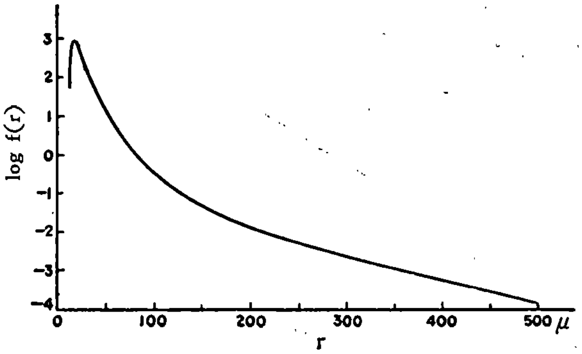

图 3

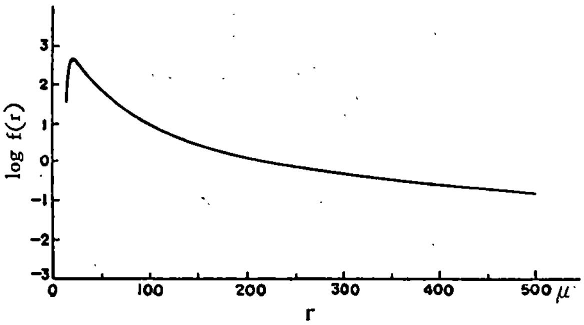

图 4

力碰并起伏增长，大云滴在这时候可以有相当大的浓度.

比較各个例子，还可以看出同样情况下，虽然起伏愈大(σ_n 愈大)，所长成的云滴大小相差也愈大，但如果浓度很大，或者时間很长（图 4 与图 5），大小不同的影响就比較不显著.

还应該注意，例 5 事实上相当于 $\sigma_n = \bar{n}/6$ 时，$\bar{n} = 125$ 个/厘米^3 ($q = 0.5$ 克/米^3)，$t - t_0 = 8000$ 秒，或 $\bar{n} = 50$ 个/厘米^3($q = 0.2$ 克/米^3)，$t - t_0 = 2 \times 10^4$ 秒. 而 $\sigma_n = \bar{n}/6$ 时浓度起伏已相当小(99.7% 以上浓度在 $\frac{1}{2}\bar{n}$ 与 $\frac{3}{2}\bar{n}$ 之間，即上下两个浓度相差只有三倍). 由此可見即使浓度起伏相当小，含水量也不大的云（可以是层状云）中，如果云存在时間比較长(几小时到 6，7 小时)，云够厚，也可以形成很多大云滴. 起始半径 r_0 的水滴浓度 1 个/厘米^3 时，$r = 100—200\mu$ 的大小滴浓度可大到 10^2 个/升.

也可以看到如果平均含水量很大，那末即使在不到 1 小时之內也可以形成够多的大

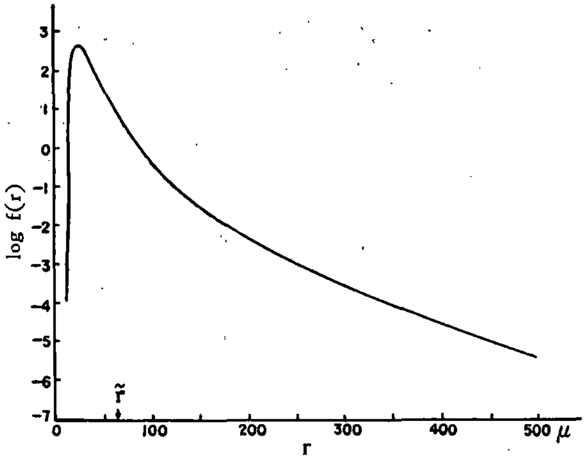

图 5

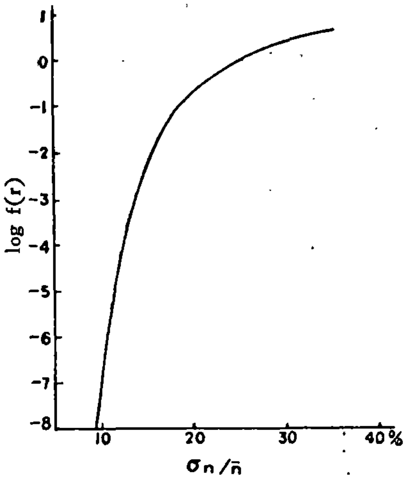

图 6

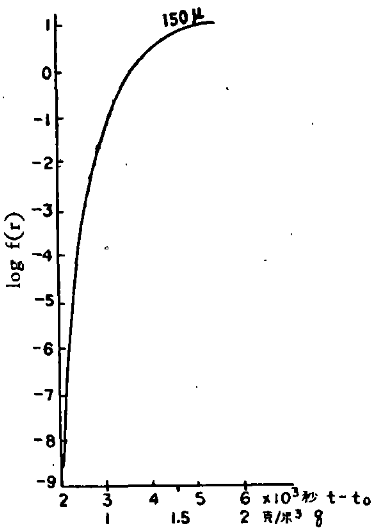

图 7

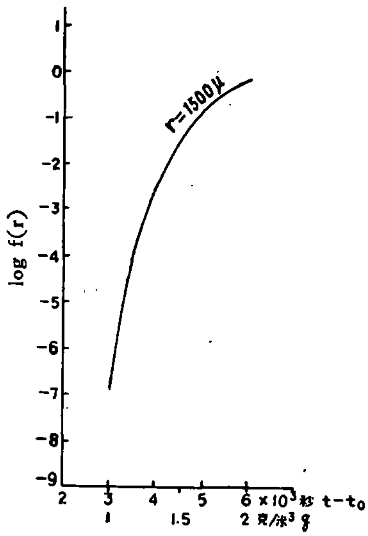

图 8

云滴，实际上例 1 对于 $\bar{n}=500$ 个/厘米³ ($q=2$ 克/米³)，$\sigma_n=\bar{n}/3$，$t-t_0=1000$ 秒也同样合用．可見平均含水量 1—2 克/米³的云中，在起伏条件下，由重力碰并作用可以很快的形成一批大云滴．应該指出，如果沒有浓度起伏，这时候 $r_0=12.6\mu$ 的云滴只能长到半径为 20 多微米．

这結果可以解释为什么厚度相同的同类层状云在暖区中的大云滴就比較多，在反气旋下的就比較少[6]．看来問題不一定是凝結核的数目大小不同，恐怕与垂直运动起伏相联系的云雾物理量的起伏大小不同还是主要的．

为了了解 σ_n 对云滴生长的影响，我們計算了 $\bar{n}=250$ 个/厘米³ ($q=1$ 克/米³)，$t-t_0=4000$ 秒时，$r=150\mu$ 的大云滴的浓度随 σ_n 的变化(图 6)．从图上可以看到当 σ_n 小于一定数值时（在这情形下是 $\sigma_n/\bar{n}=10\%$），大云滴的浓度急剧减小，以致难于观測到，

也沒有多大重要性；而当 σ_n 大于一定値时，大云滴的浓度都已相当大，虽然还有成倍的差别，但已不会造成量級的差别．可見只要起伏达到一定大小，总可造成够多的大云滴．

同样，我們要了解各时間的生长过程．为此，我們計算了 $\sigma_n/\bar{n} = 1/3$，$\bar{n} = 250$ 个/厘米^3（$q = 1$ 克/米^3）时，$r = 150\mu$ 的大云滴，以及 $r = 500\mu$ 和 1500μ 的雨滴的浓度随 $t - t_0$ 的变化（图 7—9）．可以看到，当 $t - t_0$ 小于一定値时，大云滴的浓度急剧减小，以

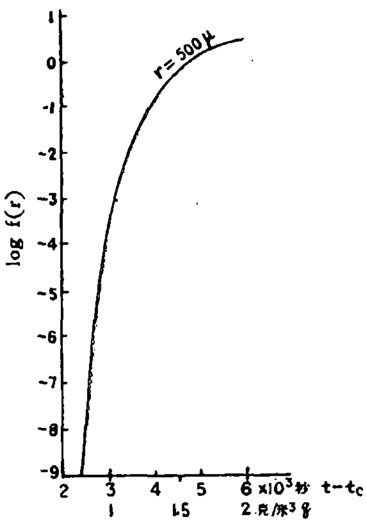

图 9

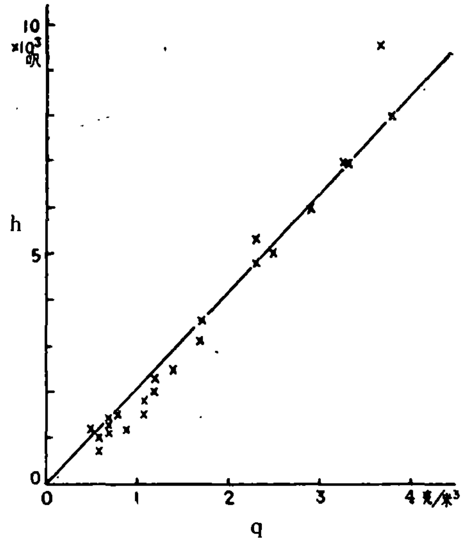

图 11 根据文献[6]

致难于观测到，也沒有多大重要性；而当 $t - t_0$ 大于一定値时，大云滴的浓度都已相当大，甚至差不了几倍．

显然，在我們的(7)式中，当 $\sigma_n/\bar{n}$ 不变时，$\bar{n}$ 与 $t - t_0$ 的作用是相同的．因此把图 7—9 中的横坐标换算成相应的浓度或含水量就可表示浓度或含水量对大云滴浓度的影响．在图 7 上可以看出，当 $\sigma_n/\bar{n} = 1/3$，$t - t_0 = 3000$ 秒，$q < 0.8$ 克/米^{3}的云中不会有多少大云滴，而 $q > 1.4$ 克/米^{3}时，不同含水量下大云滴的浓度相差有限．

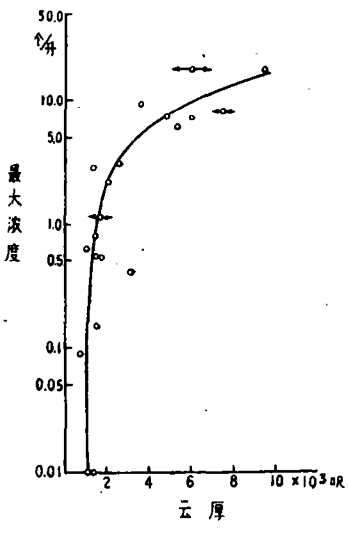

图 10 根据文献[6]

如果把图 7 与观测到的数据比較一下是很有意思的．根据观测[6]云厚与大云滴的最大浓度的关系可以用与图 7 中相类似的曲綫来描写（图 10）．实际上在这些观测中含水量与云厚是成正比的（图 11）．因此云厚与大云滴最大浓度的关系，可看成含水量与大云滴最大浓度的关系．考虑到图 11 中的数据，包括了不同天气类型即各种 σ_n 下的情况，图 7 与图 11 中两曲綫的类似程度已經可以說是比較滿意的[1]．

也可以注意，譜还是围繞均匀条件下重力碰并所应

1）还有 Schmidt[7] 的观測結果，与 Singleton 的类似．

造成的半径 $\tilde{r}$ 而生长的. 在例 1 中. 众数半径与 $\tilde{r}$ 相差不到 1μ（例 5 中差得大些）. 这与 Telford 的結果有很明显的不同. 前面指出过在 Telford 的結果中看不到重力碰并的特征的任何痕迹. 而 Telford 所求出的 $t = 4000$ 秒时长到 3 毫米以上的計算，更是問題很多（相应的云厚，气流，所取的 Stokes 末速度以及級数解的收斂性等等），因此它是无法接受的.

最后，清楚的是，在起伏条件下 $r = 20—30\mu$，这段間隔不一定是一个严重的"生长障碍"，而且由凝結增长下所形成的、比較窄的譜，也可以較快的长出大云滴来. 这是均匀重力碰并下所做不到的.

*　　　*　　　*

对周秀驥同志很有帮助的討論，謹致謝意.

参　考　文　献

[1] 顧震潮，論近年来云霧滴譜形成理論的研究，气象学报，**32** (1962), 367—384.
[2] Telford, J., *J. Meteor.*, **12**(1955), 436—444.
[3] Welander, P., *Tellus*, **11** (1959), 199—201.
[4] Mason, B., *Physics of* Clouds. Oxford, 1957, p. 421.
[5] 郑紹濂等，概率論与数理統計，1960，科学技术出版社.
[6] Singleton, F., *Q. J. Roy. Met. Soc.*, **86** (1960), 195—204.
[7] Schmidt, F., *Geof. Pura e Atpp.*, **50** (1961), III, 176—182.

ON THE GROWTH OF THE DROPLETS UNDER GRAVITATIONAL COALESCENCE IN A FLUCTUATING ENVIRONMENT

Koo Chen-chao and Tsan Li-san
(*Institute of Geophystes and Meteorology, Academia Sinica*)

Abstract

As the cloud structure is usually fluctuating, it is important to study the growth of the droplets under gravitational coalescence in such an environment. In this paper the growth rate of cloud droplet is calculated under the consideration of the fluctuation of the water content. The result obtained differs considerably from that obtained for the case without such fluctuation, and seems in better accord with the condition observed in the atmosphere. The growth rate is now much greater and the precipitation elements may even develop quickly from a group of small droplets of small dispersion in a cloud in a state of not intensive fluctuation.