第33卷 第3期　　气象学报　　Vol. 33, No. 3
1963年8月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　August, 1963

論太阳高度角的查算*

陶祖文
(中央气象局观象台)

水平面上的太阳輻射強度 s' 是輻射平衡方程中的一个最主要的項目，通常 s' 都是利用直接輻射表观测到的垂直于太阳射綫方向的太阳直接輻射強度 s，乘以太阳高度角 h 的正弦求得：

$$s' = s \cdot \sin h. \tag{1}$$

而太阳高度角可根据天球座标公式[1]

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \tag{2}$$

求出.（2）式中 φ 为观测地点的緯度，δ 为观测当时的太阳傾角，t 为观测当时的眞太阳时时角.

在定点的气象日射观测台站上，由于緯度 φ 为一固定值，(2)式中的变数仅有三个，因而可以利用直角座标图解出 $\sin h$ 值来. 以 $\sin h$ 为纵座标，以 $\cos t$ 为横座标，相应于不同的 δ 即有互不相交的直綫組. 由此組成了日射台站上普遍用以查算太阳高度角的 Набоков 图[2].

利用 Набоков 图查算太阳高度角，只能应用于定点的日射观測站，而不能适用于一个較大的区域. 例如，在野外考察、調查时，由于測点經常变动，緯度有了較大的改变（大于 0.1°），必須編制不同的 Набоков 图，这在实际上是不可能的. 若利用公式(2)直接計算，并要保証由(1)式所計算得出的 s' 与实測的 s 能有同样的精确度 ±0.01 卡/厘米²·分，三角函数应分别取小数四位来求算. 因此，計算工作是很繁重的，而且极易发生錯誤，在实际工作中，一般都不采用直接計算的方法. 有一些著作，如 Ахматов，кавpайский 等企图从其他途径来計算太阳高度角（有关的材料在 Янишевский[3] 的著作中，有較为扼要的介紹），由于都需要了解一些其他的天文参数，因而不能在气象观測中普遍使用.

在本文中制定了当緯度改变 $|\Delta\varphi| \leqslant 2°$ 的非定点日射观測时，查算太阳高度角的一个新的方法.

一、新查算图制作的依据

(2)式是一个非綫性非齐次的四元方程，不可能用一般的将座标綫性变换的方法，使 Набоков 图适用于不同的緯度. 但是当利用緯度的改变 $\Delta\varphi$ 相对地很小（$\Delta\varphi \ll \varphi$）时，可以分别地变换纵、横座标，制定出使緯度为 φ 的 Набоков 图上的 δ 綫組仍然不变、并适用于 $\varphi \pm \Delta\varphi$ 新的查算图.

1. 纵座标的变换

适用于緯度 φ 的 Набоков 图上的纵座标为 $\sin h = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \delta\right)$，設緯度改变

* 本文 1962 年 12 月 17 日收到.

$\Delta\varphi$ 后的新縱座标为 $\sin h'$，則对于 $\cos t' = 1$ 的新縱座标方程由(2)式卽可得出：

$$\sin h' = \sin(\varphi + \Delta\varphi)\sin\delta + \cos(\varphi + \Delta\varphi)\cos\delta$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \Delta\varphi + \delta\right). \tag{3}$$

假如新縱座标之太阳高度角与原縱座标之关系可写成 $h' = h + \Delta h$，于是(3)式表明，在緯度增減 $\Delta\varphi$ 时之新縱座标，卽为太阳高度角減增 Δh 的原縱座标，也卽新縱座标的刻度仍然满足正弦关系. 由(3)式还可以表明：由于緯度增減量与太阳高度角的增減量作相反向的改变，原 Набоков 图上相应于不同太阳傾角 δ 的綫組，与新查算图上 δ 綫組在縱座标上的交点重合.

2. 横座标的变换

在新的縱座标确定后，由于仍取用原 Набоков 图上的 δ 綫組，因此 δ 綫組与新横座标的交点均已确定，現在要定出新横座标上这些交点所相应的时間.

考虑横座标时，$h = 0$ 及 $\Delta h = -\Delta\varphi$，并設新横座标的眞太阳时間为 t'，对于緯度为 $\varphi + \Delta\varphi$，公式(2)可写成：

$$\sin h' = \sin(\varphi + \Delta\varphi)\sin\delta + \cos(\varphi + \Delta\varphi)\cos\delta\cos t',$$

从中得出：

$$\cos t' = -\mathrm{tg}(\varphi + \Delta\varphi)\,\mathrm{tg}\,\delta - \frac{\sin(\Delta\varphi)}{\cos(\varphi + \Delta\varphi)\cos\delta}. \tag{4}$$

由于 $|\Delta\varphi| \leqslant 2^\circ$，当緯度 $\varphi > 20^\circ$ 时，有：

$$\cos(\varphi + \Delta\varphi) \approx \cos\varphi\cos(\Delta\varphi),$$

$$\mathrm{tg}(\varphi + \Delta\varphi) \approx \mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{tg}(\Delta\varphi),$$

因而(4)式可写为：

$$\cos t' = -\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta - \mathrm{tg}\,\delta\,\mathrm{tg}(\Delta\varphi) - \frac{\mathrm{tg}(\Delta\varphi)}{\cos\varphi\cos\delta}. \tag{5}$$

(5)式表明，新横座标的刻度相当于原横座标的刻度加以二个附加訂正項.

二、新查算图的制作方法和查算方法

1. 新查算图的縱座标的制作方法

若新查算图所适用的緯度范围为 $\varphi \pm 2^\circ$，先按其中間的緯度 φ 制作出 Набоков 图. 这时，根据查算精度的要求可以略去小于 0.001 的項，則 $\sin^2(\Delta\varphi) \approx 0$；$\cos(\Delta h) \approx 1$，所以

$$\sin(h + \Delta h) \approx \cos h\sin(\Delta h) + \sin h,$$

$$\sin(h + 2\Delta h) - \sin(h + \Delta h) \approx \cos h\sin(\Delta h).$$

因此，

$$\sin(h + 2\Delta h) = \sin(h + \Delta h) + \cos h\sin(\Delta h),$$

$$= \sin h + 2\cos h\sin(\Delta h). \tag{6}$$

由(6)式表明，可以与原縱座标平行地按等間距地作相应于緯度为 $\varphi + 2^\circ$ 和 $\varphi - 2^\circ$ 的新縱座标，按照(3)式緯度为 φ 时的太阳高度角 h 和緯度 $\varphi + 2^\circ$ 时的 $h - 2^\circ$、緯度 $\varphi - 2^\circ$ 时的 $h + 2^\circ$ 共三个点位于与縱座标組相垂直的直綫上. 而且不同緯度的縱座标上的 h(等太阳高度角)点可以用直綫相連. 于是只需作出 $\varphi + 2^\circ$ 和 $\varphi - 2^\circ$ 的新縱座标，可

按綫性內插的方法,同样精确地制定出 $\Delta\varphi$ 为分度时的縱座标軸.

此外,还需說明 $h=0°$ 时的情况. 对于緯度为 $\varphi+\Delta\varphi$ 的新座标軸的零点,在原縱座标軸为 Δh 而与縱座标相垂直的交綫上,而对于緯度为 $\varphi-\Delta\varphi$ 的新縱座标軸的零点应位于原縱座标軸的 $-\Delta h$ 而与縱座标相垂直的交綫上. 根据(6)式,該点的具体位置可以簡单地用緯度为 $\varphi+\Delta\varphi$ 和 φ 的縱座标軸的零点,連接直綫并延长到与 $\varphi-\Delta\varphi$ 的縱座标相交之处.

2. 新查算图的横座标的制作方法

緯度改变 $\Delta\varphi$ 后的新横座标,可以取不同的 δ 值代入(5)式中求出不同的 $\cos t'$ 值来,从而定出横座标的刻度. 但由于考虑的仅是 $h=0°\pm2°$ 的情况,因此只能定出局部的时

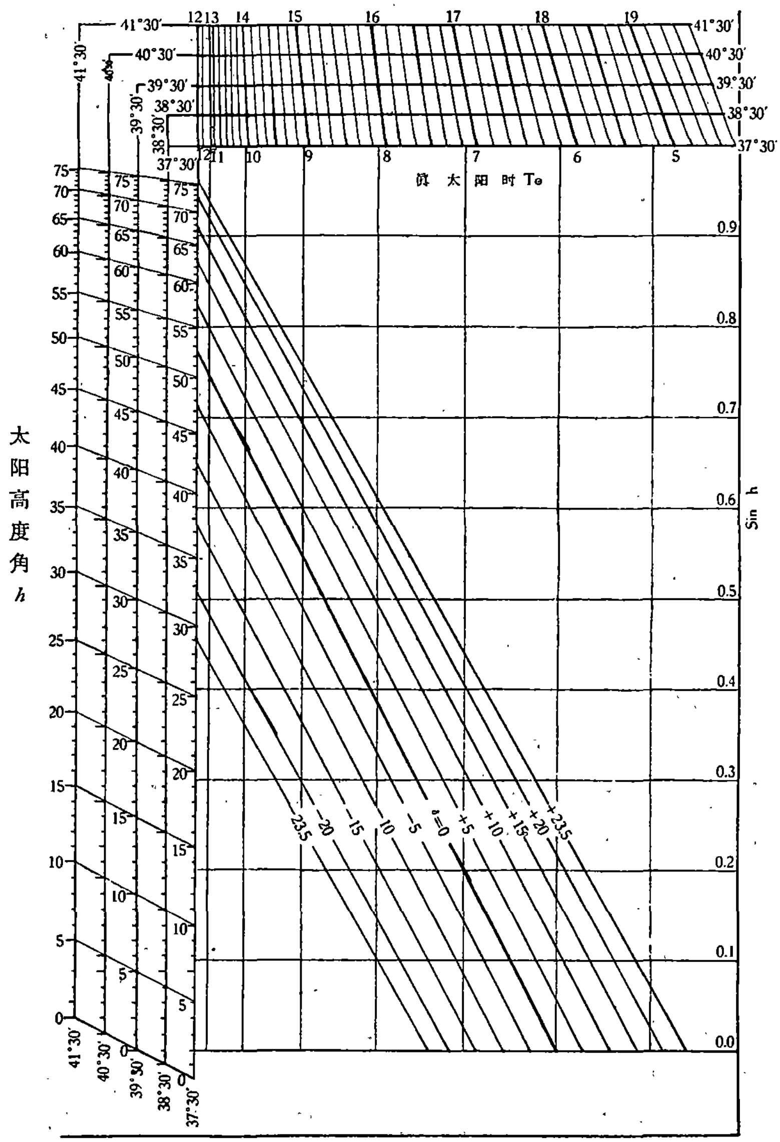

图 1 緯度 39°30′ ± 2° 的太阳高度角查算图

間刻度(对于中緯度 40°—50°，約为眞太阳时 4^{30} 到 7^{30})，所以，还必須利用其他的太阳高度角来确定时間刻度. 因此，这样的制定刻度的方法是比較复杂的，而且采用不同太阳高度角計算的結果，时間刻度也可能是不重合的(計算誤差是一个重要因素).

由于太阳高度角相对于眞太阳时正午的分布是对称的，而(2)式对于任何緯度又是一个普遍关系式，所以，对任何緯度的新横座标的零点(正午)都必須是重合的. 同时横座标的刻度仍应是余弦分布的[1). 因此，由公式(5)，取 $\delta = 0$，則

$$\cos t' = \frac{\operatorname{tg}(\Delta\varphi)}{\cos\varphi}, \tag{7}$$

即为緯度改变 $\Delta\varphi$，$\delta = 0$ 时的眞太阳时 6 时的位置. 根据正午和 6 时的距离，按照余弦的比例刻划出各眞太阳时的位置. 由于在 $\delta = 0$ 时，对于緯度 φ，$\cos t = 0$，且

$$\cos(t + \Delta t) \approx -\frac{\operatorname{tg}(\Delta\varphi)}{\cos\varphi}, \quad \cos(t + 2\Delta t) \approx -2\frac{\operatorname{tg}(\Delta\varphi)}{\cos\varphi},$$

$$\cos(t + 2\Delta t) = \cos(t + \Delta t) - \frac{\operatorname{tg}(\Delta\varphi)}{\cos\varphi}.$$

因此，与纵座标的制作相似，緯度之間眞太阳时的不同也是呈綫性改变的.

以 $\varphi = 39°30'$，$\Delta\varphi = \pm1°$，$\pm2°$ 为例，取 $\delta = \pm23°30'$，$\pm20°$，$\pm15°$，$\pm10°$，$\pm5°$，$0°$ 制定出的新查算图如图 1.

3. 查算方法

从相应緯度的横座标上找出已知眞太阳时的位置，垂直移动到与該观測日相应的 δ 綫的交点，然后平行移动到与相应緯度的新纵座标軸的交点，它的讀数(刻度)即为当时的太阳高度角. 再按等太阳高度角綫平行地移动到与原纵座标的交点，从新查算图的右端刻度綫，即可讀出太阳高度角正弦的三位有效数字.

三、新查算图的检驗和誤差問題

1. 对新查算图的检驗

新查算图是以中間的緯度 φ 和 $\delta=0$ 为基础制定的. 在分别制定不同緯度的 Набоков 图时，可以发現不同 δ 值的直綫的斜率和直綫的間距是不同的. 虽然在新查算图中的座标經过了变换，但在緯度改变后，仍用緯度 φ 的 δ 綫組，特别是横座标是在特定的太阳高度角时制定的，因此是不够严密的. 为了检驗新查算图的正确性，对利用新图查算的結果和按(2)式計算的結果进行了比較.

检驗的方法：取緯度为 39°30′ 的太阳高度角 h 分别为 0°，5°，10°，20°，30°，40°，50°，60°，70°，若 $\Delta\varphi = \pm 2°$，則相应于緯度 $39°30' \pm 2°$ 的太阳高度角分别为 $h \mp 2°$，再分别取 δ 为 $\pm23°30'$，$\pm20°$，$\pm15°$，$\pm10°$，$\pm5°$，$0°$，根据(2)可以計算出不同 δ 不同 h 时在不同緯度的眞太阳时間(計算結果精确到 1 分鈡). 从查算的方法可知：計算所得的眞太阳时間应位于以原横座标的眞太阳时为軸，与新緯度的新横座标的交点处. 現将計算結果繪于横座标图上(图 2).

1) 根据驗算的結果，由于采用不同的太阳高度角进行計算，横座标的刻度不是严格地遵循余弦分布的. 这是由于(5)式中的二个附加項引起的. 取横座标为余弦分布的精确性，参見本文誤差問題的一节.

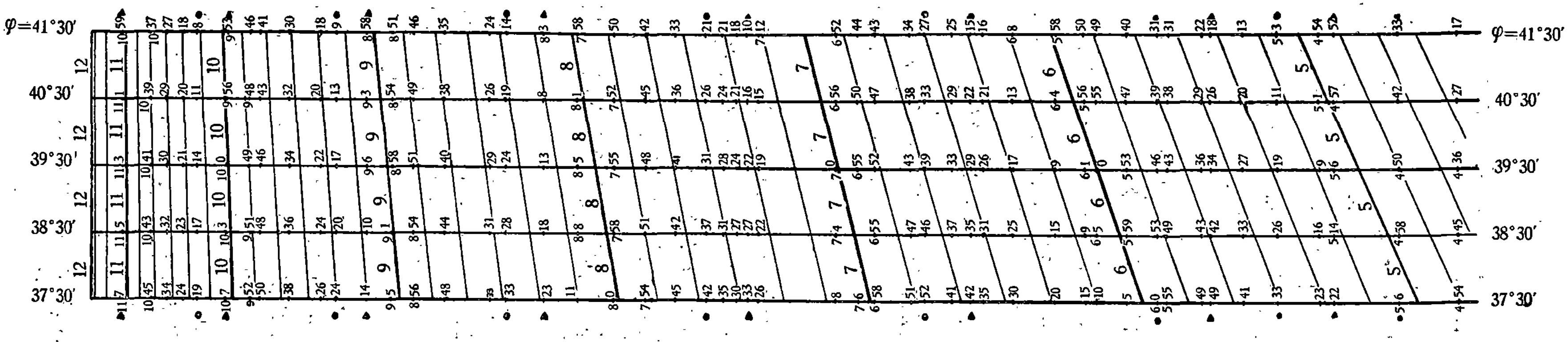

图 2　按（7）式和（2）式計算眞太阳时間的比較图

▲ 利用 $\delta = 23°30'$ 計算的結果　● 利用 $\delta = 20°$ 計算的結果　— 按(7)式画出的时間綫

检驗的結果：新查算图上的时間刻度偏差 Δt 是与 $|\Delta\varphi|$ 成正比，$\Delta\varphi = 0$ 时，$|\Delta t| \leqslant 1$ 分鈡(計算誤差)；$|\Delta\varphi| = \pm 2^\circ$ 时，$|\Delta t| < 4$ 分鈡. Δt 的值是与取用的 δ 值有关，$|\delta|$ 值越大，$|\Delta t|$ 也越大. 在 $\Delta\varphi = \pm 2^\circ$ 的横座标上，$|\delta| > 15^\circ$，則 $|\Delta t| \geqslant 3$ 分鈡；$|\delta| \leqslant 15^\circ$，$|\Delta t| < 3$ 分鈡.

上述結果是与新横座标按太阳傾角 $\delta = 0$ 来制定有关. 这也可以从(5)式中看出，随着 $|\delta|$ 和 $|\Delta\varphi|$ 的增加，$\mathrm{tg}\,\delta$ 和 $\mathrm{tg}\,|\Delta\varphi|$ 也都相应地增加.

利用新查算图时 s' 的誤差問題

在討論誤差时，緯度及太阳傾角的值可以認为是正确的，因而 $d\varphi = d\delta = 0$，对(2)式微分

$$dh = -\frac{\cos\varphi\cos\delta\sin t}{\cos h}\,dt. \tag{8}$$

在(8)式中，因 $-23^\circ 30' \leqslant \delta \leqslant 23^\circ 30'$，$\cos\delta$ 的变化在 0.917—1.000 之間；緯度的变化范围为 $\pm 2^\circ$，$\cos\varphi$ 也仅有 ± 0.05 的变化；因而可以認为 $\cos\varphi\cdot\cos\delta$ 为一个常系数. 在(8)式中，$\dfrac{\sin t}{\cos h}$ 的値也因 $\sin t$ 和 $\cos h$ 值的增減是同步的（h 大則 t 小），取微分，可求出其最大极限値为 1. 所以在 $\varphi = 39^\circ 30'$ 时，新查算图的最大可能誤差为：

$$(\Delta h)_{\max} = 1 \times 0.79 \times 0.91 \times (\Delta t)_{\max} \approx 43'.$$

不难計算出对于任何緯度和太阳傾角，$(\Delta h)_{\max}$ 仅为 $55'$.

太阳高度角的誤差 $43'$ 仅在 $h < 28^\circ$ 时才对 $\sin h$ 值产生 0.01 的影响. 由于 h 越小，s 値也越小，通常在 $h < 28^\circ$ 时，$s < 1.0$ 卡/厘米^2·分. 而 h 增大时，誤差 $43'$ 所产生的影响減小，从查算图上的刻度来看，h 越大（卽越接近正午），h 和 t 的刻度所允許的誤差也就增大. 因此，卽使眞太阳时在最大誤差时，仍能使 s' 具有 ± 0.01 卡/厘米^2·分的精确度.

通常，Δh 仅为 $20'$—$30'$. 在 $\varphi = 37^\circ 30'$，$\delta = 0^\circ$，$h = 20^\circ$，$t = 64^\circ$ 时，$\Delta h \approx 30'$，若 s 为 1.00 卡/厘米^2·分，s' 的誤差为：

$$\Delta s' = 1 \times 0.008 = 0.008 \text{ 卡/厘米}^2\cdot\text{分}.$$

四、結　　論

利用某一緯度的查算太阳高度角的 Набоков 图，可以通过縱横座标的簡单的三角变換，用以查算出在緯度高于 20° 的地区，緯度变化不超过 ±2° 地点的太阳高度角. 采用这个查算图，仍能使水平面上太阳輻射強度的計算精确度保持在 ±0.01 卡/平方厘米·分.

*　　*　　*

在工作过程中曾蒙李玉海、陆振和同志提供意見，作者謹致謝意.

参　考　文　献

[1] Кондратьев К. Я., Лучистая энергия солнца, Гидрометеоиздат, 1954.
[2] Набоков М. Е., Некоторые номограммы для наблюдателей, Русск. астроном. календ, 1929.
[3] Янишевский Ю. Д., Актинометрические приборы и методы наблюдений, Гидрометеоиздат, 1957.