

中小尺度运动中风場和气压場的适应*

叶篤正 李麦村

(中国科学院地球物理研究所)

提 要

在大型运动中有所謂地轉适应的現象。本文研究了中小尺度运动中风場和气压場之間的适应問題。

由尺度分析可以发现：在一般中小尺度运动方程中，時間导数項較其中的各主要項小一个量級。因此可以认为中小尺度运动是在力的准平衡状态下进行緩慢的演变。当有某种原因破坏了这种力的准平衡态时，即有一种机制使运动回到准平衡来。这种准平衡态是惯性力(即速度平流)、科氏力和气压梯度力三者之間的准平衡。

由准平衡态的破坏恢复到准平衡的过程称为中小尺度的适应过程；准平衡态下的演变过程称为准常定过程。文中討論了这两种过程中运动的物理性質。指出：对中小尺度运动而言在适应过程中 $D \gg \zeta$ ，在准常定过程中 $D \leq \zeta$ ，这里 D 和 ζ 分别为散度和涡度。

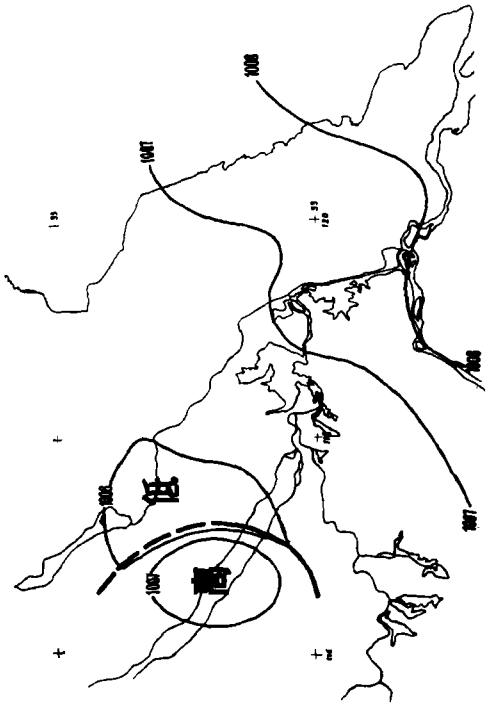
設在某一有限的区域中，运动的平衡态受到了严重破坏，作为初值問題可以計算破坏以后运动的发展。計算結果表明：在短暫的时间內，气象要素有一急烈变化和調整，重新恢复准平衡态；時間稍长运动即进入准常定的演变。

一、引 言

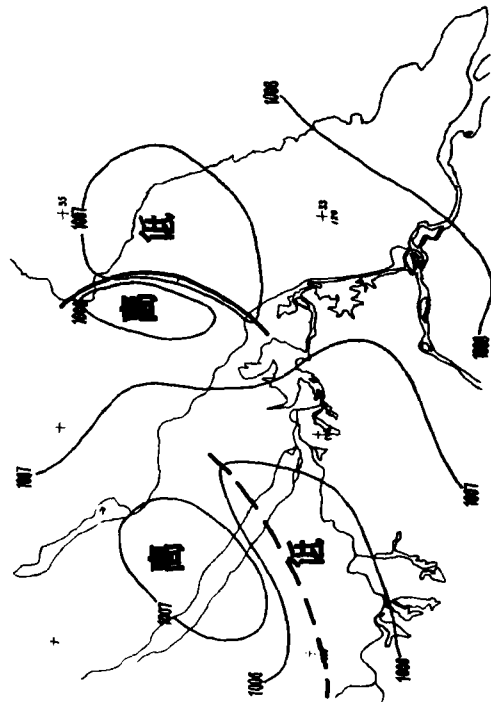
准地轉是中高緯度大型运动的一个非常重要的特性，无論是对于天气分析或是对于預告(包括数值預告)它都起着很大的作用。近年来，中小尺度的观测和分析研究虽然也日益迅速地发展，但缺少象可以用于大型天气分析和預告的准地轉关系，这給这方面的天气和动力学的研究增加了不少困难。于是实践本身就自然地提出下面的問題：在中小尺度运动中是否也有类似于地轉风的平衡状态，如果风和气压場存在某种平衡关系，那么它的形式如何？中高緯大尺度的运动可以区分为适应过程与发展过程，中小尺度的运动是否也如此？如可这样分，每一过程的物理性質又如何？这些問題将是本文研究的对象。

近年来中小尺度运动的观测資料日益增多，根据已有的資料，我們可以看出，中小系統的生命史可分为三个阶段，即发生阶段，維持阶段和消失阶段。在发生和消失阶段中，一般場的变化比較急烈，時間比較短暫。在維持阶段，場的演变比較緩慢，而这一过程持續時間要超过其他两个阶段很多。例如，一块強大的雷暴云，可以在短短的十几分鐘內形成，而維持阶段時間可长达二、三小时之久^[1]。其他天气图上可以观测到的中小系統一般也是这样。图1是一个雷暴高压的生命史，由图1a看出，其中并无天气系統，一小时后在

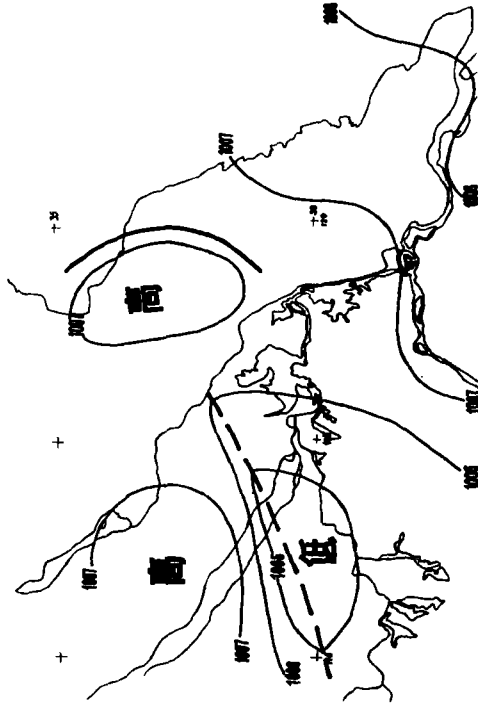
* 本文1964年4月10日收到，5月收到修改稿。



a 1963年7月29日06时(北京时)地面气压形势图



b 1963年7月29日12时(北京时)地面气压形势图
(实线表示等压线,其他说明见图1b)



c 1963年7月29日13时(北京时)地面气压形势图
(说明见图1c)

图1 我国华东地区一次雷暴高压的生命史

图 1b 中西部出現了一个雷暴高压, 中心强度为 1007 毫巴, 以后稍有加强, 中心强度为 1008 毫巴, 此后强度基本不变, 一直维持了五小时(图 1c)。在此期间各种要素基本上是处于比较稳定状态。再经过一小时后稍有减弱(图 1d), 中心强度降回到 1007 毫巴。入海后情况不明, 看样子趋于消失。由此可见, 这个雷暴高压, 其中心强度维持不变达四小时, 加上前后的微弱变化至少准常定地维持了七个小时; 而它形成时间却不到一小时。

由此可见, 中小系统的运动, 在其消失以前, 一般可以区分为两个不同的阶段, 即气象要素有急剧变化的发生阶段和相当稳定的维持阶段, 而过程进行的时间长度, 后者远大于前者。

从运动方程各项量级的分析, 也可以看出中小系统的这种性质。如果我们研究的对象不包括以对流活动为主的极小尺度的系统, 则第三运动方程立即可以由静力平衡代替, 于是在自由大气中有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -g\rho, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 f 为科氏参数, 其他均为气象学常用符号。

现在令 L 和 H 分别为运动的水平和垂直方向特征尺度, V 和 W 分别为运动的水平和垂直特征速度, τ 为运动的特征时间, π 为大气密度特征量, $\Delta_h p$ 和 $\Delta_z p$ 分别为 p 的水平和垂直空间特征变化量, 引入无量纲变量:

$$\left. \begin{aligned} (u', v') &= (u, v)/V, \quad w' = w/W, \quad (x', y') = (x, y)/L, \\ z' &= z/H, \quad t' = t/\tau, \quad \rho' = \rho/\pi, \quad \Delta p' = \Delta p/\Delta_h p \text{ 或 } \Delta p/\Delta_z p, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

则(1)式的第一方程可写成:

$$\frac{1}{f\tau} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{V}{fL} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \frac{W}{fH} w' \frac{\partial u'}{\partial z'} = v' - \frac{\Delta_h p}{\pi f V L} \frac{\partial p'}{\partial x'}. \quad (3)$$

因为第二运动方程与第一运动方程在形式上完全一致, 故不再给出。

对于中高纬大型运动可令 $L = 10^6$ 米, $H = 10^4$ 米, $V = 10$ 米/秒, $W = 10^{-2}$ 米/秒, $\tau = 10^3$ 秒, $f = 10^{-4}$ /秒, 代入(3)式, 可以看到左边各项的系数比右边小一个量级以上, 略去小量, 即得大型运动的地转关系。

对于中小尺度 ($L = 10^4 - 10^5$ 米) 运动, $W = 10^0 - 10^{-1}$ 米/秒, $\tau = 10^4 - 10^5$ 秒, $H = 10^3 - 10^4$ 米, V 和 f 和大尺度相同, 当特征量接近于上限时, 则运动接近于中尺度运动, 取下限时, 为小尺度运动。代入(3)式, 比较量级, 略去小项而得中小尺度运动的零级近似方程¹⁾:

1) 对于对流性稍强的运动, 在第一、二运动方程中分别保留 $w \frac{\partial u}{\partial z}$ 和 $w \frac{\partial v}{\partial z}$, 这两项的保留与否并不影响我们下面的讨论。

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

对于这种运动,我们有:

$$\Delta_s p = \pi V^2. \quad (5)$$

这是一般流体力学中所取的关系。当运动尺度到达下限时,科氏力项亦可略去。

中高緯大尺度的地轉关系和中小尺度运动的零級近似有个共同特点,即它們都沒有時間的導數項,所以無論對於大型或中小型的運動,都可以認為是准常定的,即無論那一類運動都是在力的准平衡(或適應)狀態下,進行緩慢的演變。

上面的特征量都是選自系統已經進入比較穩定時期的狀態,因而上面的分析不適用於系統的生成和消滅階段,在生成和消滅階段,特征時間應當比上面所選的小一個量級,這時運動方程中的時間導數項,將和其他主要項同一量級。

二、中小尺度運動的階段性

在中小型運動中既然存在迅速的生成階段和力的准平衡下的准常定階段,如由某種原因力的准平衡態遭受到破壞,則運動將迅速地發生變化,調整到准平衡態的緩慢運動。在大尺度運動中,這種變化稱為地轉適應過程^[2,3],這個階段以後的運動稱為發展過程^[4,5]。我們把中小型運動中這兩個階段也分別稱為適應過程和准常定過程。曾慶存^[5]在分析大尺度運動時指出,這兩個過程在時間上基本上是可區分的。這裡將說明這兩種過程對於中小尺度運動來說,也是基本上可以區分開來的。

將(3)式改寫成下面形式¹⁾:

$$\varepsilon \frac{\partial u'}{\partial t'} + \left[\left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{v'}{R} \right) + \frac{a}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} \right] = 0, \quad (6)$$

式中 $\varepsilon = \frac{L}{V\tau}$, $R = \frac{V}{fL}$, $a = \frac{\Delta_s p}{\pi V^2}$, 運動的准常定的程度決定於(6)式方括號中各項代數和的量級。因為(6)式的變數都是以特征量為單位的無量綱數,量級為 10^0 。但因 R 和 a 的量級可以遠大於或遠小於 1, 所以方括號內各項之和的量級可令為 10^n 。量級 n 愈小則力愈接近於平衡,運動愈接近於常定;量級愈大,愈不平衡,運動的變化愈大。當 $n \leq -1$ 時,可以認為各種力處於准平衡態;當 $n \geq 0$ 時,可以認為各種力處於非平衡態。 n 愈小平衡程度愈大, n 愈大,平衡態破壞得愈厲害。

由上式有:

$$0(\varepsilon) = 0(10^n), \quad (7)$$

由此給出

$$\tau = 10^{-n} L/V. \quad (8)$$

當力的平衡遭到破壞時,可取 $n \geq 0$, 運動適應過程的特征時間為

1) 這裡略去了慣性項中帶有對 x 微商項,但這絲毫不影響以下的討論。

$$\tau_a \leq L/V, \quad (9)$$

当力呈准平衡状态时,取 $n < -1$, 則运动的准常定过程特征時間

$$\tau_c \geq 10L/V, \quad (10)$$

由此可見

$$\tau_a \leq 10^{-1}\tau_c. \quad (11)$$

这表明适应过程的特征時間要比准常定过程的特征時間小一个量級以上。因此当平衡遭到破坏之后,首先的过程主要是适应过程,然后主要的才是准常定过程。也就是說两个过程在時間上具有可区分性。

取中尺度的特征值($L = 10^5$ 米, $V = 10$ 米/秒),則 $\tau_a \leq 10^4$ 秒, $\tau_c \geq 10^5$ 秒,取小尺度特征值,則 $\tau_a \leq 10^3$ 秒, $\tau_c \geq 10^4$ 秒。

上面的結果适用于各种类型的运动。对于中尺度, $R \approx 10^0$, 而(6)式方括号中是三种力(慣性力,科氏力与气压梯度力)的相互作用。而对小尺度 $R \approx 10^1$, 于是(6)式方括号中主要只是两种力,即慣性力和气压梯度力相互作用。

三、适应过程和准常定过程的物理性質

前节我們指出了适应过程和准常定过程在時間上基本上可以区分开来, 因此我們可以分別討論它們的物理性質。

在 (x, y, p) 坐标中的无量綱的渦度方程为:

$$\varepsilon \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + \left(u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} \right) + \left(\zeta' + \frac{1}{R} \right) D' = 0, \quad (12)$$

式中

$$\zeta' = \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right), \quad D' = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'}$$

因为兩項之和或差有时可以相互抵消,因此, ζ' 和 D' 的量級可以小于1, 即 $O(\zeta') \leq O(10^0)$, $O(D') \leq O(10^0)$ 。現在根据(12)式分別討論适应过程和准常定过程的物理性質。在适应过程中,由于力的平衡遭到很大破坏,如前节指出,此时 $\varepsilon = 10^n$, $n \geq 1$ 代到(12)式中,而有:

$$10^n \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + \left(u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y} \right) + \left(\zeta' + \frac{1}{R} \right) D' = 0, \quad (13)$$

对于中尺度, $R \sim 10^0$, 而 $O\left(\zeta' + \frac{1}{R}\right) \sim O(10^0)$, 于是有

$$O(10^n)O(\zeta') = O\left[u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} + D' \right]. \quad (14)$$

(14)式左边的量級是 $10^n \zeta'$ ($n \geq 1$), 而右边第一、二兩項之和的量級只能小于或等于 ζ' , 因此这两項不能平衡左端。兩端量級相等,必需要求:

$$O(10^n)O(\zeta') = O(D'),$$

或

$$D' \gg \zeta'. \quad (15)$$

由此可見,中尺度的适应过程是准位势运动(对相对运动而言,不計 f)。气压場,风場和科氏力的平衡破坏得愈厉害,即 n 愈大,則适应过程愈接近于位势运动。大尺度的地轉适应

运动也有同样性质,地轉平衡破坏得愈厉害,适应过程愈接近于位势运动¹⁾。

当运动的尺度再小时, $R \gg 1$, 则(12)式右边的含 $\left(\frac{1}{R}\right)$ 项可以略去, 于是:

$$O(10^n)O(\zeta') = O\left[\left(u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'}\right) + \zeta' D'\right]. \quad (16)$$

上式中每一项均含有 ζ' , 在比较这四数量级时, ζ' 的量级可以从上式约去, 因而单从上式出发, 不能找出 ζ' 和 D' 的相对大小关系。所以小尺度的适应过程的运动性质(准涡旋或是准位势), 不能单从运动方程看出, 运动的性质还决定于其他附加的条件。

其次再讨论准常定过程的物理性质, 在准常定过程中可以不考虑时间导数项, 因而(12)式可写成:

$$R\left(u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y}\right) + (R\zeta' + 1)D' = 0. \quad (17)$$

对于中尺度运动 $O(R) = O(10^0)$, $O(\zeta') \leq O(10^0)$, 略去(17)式中的 $R\zeta'$, 不会影响这个括号项的量级, 于是有:

$$R\left(u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y'}\right) + D' = 0. \quad (18)$$

在这三项中, 头两项的量级相同。为了使方程能平衡, 第三项的量级不可能大于头两项的量级, 但可小于头两项。由此可以看出, 在中尺度的常定运动中:

$$\zeta' \geq D', \quad (19)$$

也就是说, 对于中尺度运动准常定过程, 位势运动部分小于或等于涡旋部分。这和中高纬大尺度的演变过程稍有不同, 大尺度的演变过程是准涡旋的 ($\zeta' \gg D'$)。

当 $R \gg 1$ 时, (12)式可写成:

$$u' \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \zeta'}{\partial y} + \zeta' D' = 0. \quad (20)$$

上式每一项中都有 ζ' , 故 ζ' 量级可以从方程中约去, 因此从上式不能得出 ζ' 与 D' 的相对大小。和适应过程一样, 对小尺度运动准常定过程的性质也不能确定。在小尺度运动中, ζ' 和 D' 的量级之比不能确定的原因很简单, 因为对小尺度运动可以不考虑 f , 因此如初值是无旋的, 则以后的运动都是无旋的。所以小尺度运动性质除其他因子外还决定于初值。

四、中小尺度运动中风压场向平衡状态的适应

中小尺度运动中, 风场和气压场之间既然存在着准平衡态, 当平衡态受到破坏后, 也必有一种过程使运动恢复准平衡的状态。现在我们就来说明这种过程是存在的。

由于中小尺度的适应问题是个非线性问题, 因此我们在讨论适应过程之前, 需要对运动方程形式及其性质予以重新考虑。虽然中小尺度运动是三维空间的, 但为了数学上的方便和动力上的清楚起见, 而在不影响问题的本质的条件下, 我们仍采用等压面坐标系的正压运动方程

1) 参见叶篤正, 李麦村, 大气运动中的适应问题(手稿)。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= fv - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -fu - \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中 $\phi = gh$ ，为等压面位势高度，其他符号均与以前相同。将方程(21)头二式变成另一形式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - (f + \zeta)v &= -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (f + \zeta)u &= -\frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中 $P = \frac{u^2 + v^2}{2} + \phi$ 。

方程(22)的形式与大尺度綫性的运动方程十分相似。所不同的是在大尺度中方程左边第二項是地球自轉渦度 f ，而这里是流場本身的絕對渦度，同时大尺度中的 ϕ 代以中小尺度的 P ，如果运动是常定的，則有：

$$\left. \begin{aligned} (f + \zeta)v &= \frac{\partial P}{\partial x}, \\ (f + \zeta)u &= -\frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

这一关系式与中高緯大尺度地轉平衡完全相似。由此可見，在一般情况下风平行于等能量(P)綫。由于一般等能量綫与等压綫并不平行，故风向与等压綫可以有个交角。

将(21)式的第一个方程乘以 u ，第二个方程乘以 v ，再与第三个方程相加而得到：

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \left[u \frac{\partial (P + \phi)}{\partial x} + v \frac{\partial (P + \phi)}{\partial y} \right]. \quad (24)$$

(22)式和(24)式就是我們的基本方程。將它們写成：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv + \frac{\partial P}{\partial x} &= N_u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu + \frac{\partial P}{\partial y} &= N_v, \\ \frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= N_p, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} N_u &= \zeta v, \\ N_v &= -\zeta u, \\ N_p &= - \left[u \frac{\partial (P + \phi)}{\partial x} + v \frac{\partial (P + \phi)}{\partial y} \right] - \phi' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \phi &= \bar{\phi} + \phi', \\ c^2 &= \bar{\phi}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$\bar{\phi}$ 为不随 (x, y, t) 变化的平均位势高度, N_u, N_v 和 N_p 为非线性项. 经过一些运算, 得到:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) &= fM_u + \frac{\partial}{\partial t} M_p, \\ \mathcal{L} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial M_u}{\partial y} + \frac{\partial M_u}{\partial t}, \\ \mathcal{L} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) &= \frac{\partial M_u}{\partial x} + \frac{\partial M_v}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} M_u &= c^2 \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} - \frac{\partial N_u}{\partial y} \right) - fN_p, \\ M_v &= -\left(\frac{\partial N_u}{\partial t} - \frac{\partial N_p}{\partial x} \right) - fN_v, \\ M_p &= -\left(\frac{\partial N_v}{\partial t} - \frac{\partial N_p}{\partial y} \right) + fN_u, \\ M_p &= c^2 \left(\frac{\partial N_u}{\partial x} + \frac{\partial N_v}{\partial y} \right) - \frac{\partial N_p}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

而

$$\mathcal{L} = \left[c^2 \Delta - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f \right) \right],$$

(27) 式为下列形式

$$\mathcal{L}(\varphi) = -f(x, y, t) \quad (29)$$

的非齐次方程. 解此方程所需要的初值

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, 0) &= \varphi_0(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, 0) &= \varphi_1(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

可由 u, v 和 P 等的初值表示之. 在(30)式初值条件下, (29)式的解为:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r < ct} \varphi_0(x', y') G(r, t) dx' dy' + \right. \\ &+ \left. \iint_{r < ct} \varphi_1(x', y') G(r, t) dx' dy' + \iiint_{r < ct} \int_0^{t-r/c} f(x', y', t') G(r, t-t') dt' dx' dy' \right\}, \quad (31) \end{aligned}$$

其中

$$G = \frac{\cos \frac{f}{c} \sqrt{(ct)^2 - r^2}}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}}, \quad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2. \quad (32)$$

现在我們討論 t 很小以及 t 很大时 φ 值的大小. 令 φ_0 和 φ_1 仅在某一区域 T 内不为零, T 外到处为零. 設我們討論 T 内某点 (x, y) 上 φ . 令 $\varphi = \partial u / \partial t$, 則当 $t \rightarrow 0$ 时, (31)式趋于(參看(35)式第一式)

$$\varphi \Big|_{t \rightarrow 0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t \rightarrow 0} = \left(N_u + f v - \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{t=0}. \quad (33)$$

因为我們所討論的对象是准平衡态遭到高度破坏的情况,(33)式右端一定非常大,事实上我們可以人为地令它任意的大.

当 t 很大时, T 仅为积分区域中的一个很小的范围,所以不論 t 多大,(31)式第一、二积分的积分区域均为 T , 而 t 很大时 $G \rightarrow 0$, 故这时(31)式仅决定于第三积分. 引入新函数

$$\tilde{G} = \int_{r/c}^t G(r, \xi) d\xi, \quad (34)$$

曾庆存^[5]曾証明

$$\iint_{r \leq ct} \int_0^{t-r/c} f(x', y', t') G(t-t', r) dt' dx' dy' = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq ct} \int_0^{t-r/c} f \tilde{G} dt' dx' dy'$$

故

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t \rightarrow \infty} &= \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq ct} \int_0^{t-r/c} f(x', y', t') \tilde{G}(t-t', r) dt' dx' dy' = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iint_{r \leq ct} \left(t - \frac{r}{c} \right) f(x', y', t^*) \tilde{G}(t-t^*, r) dx' dy', \end{aligned} \quad (35)$$

其中 $0 < t^* < t - \frac{r}{c}$. 可設 $\frac{dt^*}{dt} < 1$, 并注意到 $\tilde{G} \underset{t \rightarrow \infty}{=} K_0(r)$, 故上式可近似为

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t \rightarrow \infty} &= \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} t \iint_{r \leq ct} f(x', y', t^*) K_0(r) dx' dy' \cong \\ &\cong \frac{1}{C} \int_0^{ct} \bar{f}(x', y', t^*) K_0(r) r dr, \end{aligned} \quad (36)$$

其中 \bar{f} 为随 θ 方向的平均. $rK_0(r)$ 随 r 的分布見图 2. 由图 2 可以看出随 r 的增加 $rK_0(r)$ 非常迅速地趋向于零, 而其最高值也不过为 0.47 (单位为 r 的单位). 上式只在 $r = 6$ 以內积分即可很精确.

随着时间的增长, 初值扰动将随重力波向更大的四周非扰动的空間传播, 因此当 t 很大时, \bar{f} 的强度一定非常小. 这样 $\partial u / \partial t|_{t \rightarrow \infty}$ 将趋向于零. 为了确切起見, 我們以 $\bar{f}(x', y', 0)$ 代替了 $\bar{f}(x', y', t^*)$, 这样估計出(36)式右端的量級为 $10^{-4} - 10^{-6}$ 米秒⁻². 这是 $\partial u / \partial t|_{t \rightarrow \infty}$ 最大的可能. 这比一般用中小尺度运动特征量所估計出的 $\partial u / \partial t$ 还小很多.

同样可以証明 $\partial v / \partial t|_{t \rightarrow \infty}$ 和 $\partial P / \partial t|_{t \rightarrow \infty}$ 也非常小.

以上的討論指出: 当中小尺度运动的准平衡态遭受破坏之后, 运动先有一个迅速調整阶段, 然后进入准常定的演变时期.

五、数值計算的結果

中小尺度运动中, 风与气压場的适应过程以及运动的准平衡特性, 可以通过中小尺度

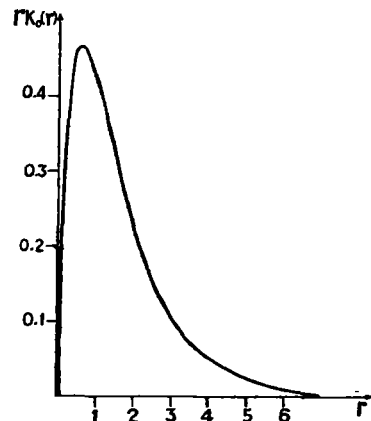


图 2 函数 $rK_0(r)$ 随 r 的分布

运动方程的直接数值计算来验证。由于中小尺度的适应过程是非线性的,为了计算方便,我们取一维运动,因为这样可以应用特征线方法求解。

取两层流体,上层和下层密度分别为 ρ' 和 ρ , 上层流体厚度取为无穷,下层厚度为 h , 则有:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u+2c) &= fv, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial}{\partial x} \right] (u-2c) &= fv, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right] v &= -fu, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

式中

$$c^2 = \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho} \right) gh. \quad (38)$$

令 v_0 为水平速度的特征量, z 为 f 的特征量, 引入新变数:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 v^*, \quad c' = v_0 c^*, \quad u = v_0 u^*, \quad x = \frac{v_0}{z} x^*, \\ t &= \frac{1}{z} t^*, \quad f = z\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

于是方程(37)变成无因次方程:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t^*} + \left(u^* + \left(\frac{c_0}{v_0} + c^* \right) \frac{\partial}{\partial x^*} \right) \right] (u^* + 2c^*) &= \lambda v^*, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t^*} + \left(u^* - \left(\frac{c_0}{v_0} + c^* \right) \frac{\partial}{\partial x^*} \right) \right] (u^* - 2c^*) &= \lambda v^*, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial}{\partial x^*} \right] v^* &= -\lambda u^*, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

其中 $c_0^2 = \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho} \right) gh$, 而 c' 为 c 与 c_0' 的偏差。上式有三个特征线:

$$\frac{dx^*}{dt^*} = u^* \pm \left(\frac{c_0}{v_0} + c^* \right) \quad \text{和} \quad \frac{dx^*}{dt^*} = u^*. \quad (41)$$

当初始值已知时,便可用一般特征线法求解 u^* , v^* 和 c^* 。

在我们的计算中,取 $\frac{\rho - \rho'}{\rho} = 0.015$, $c_0 = 20.1$ 米/秒。对中尺度取 $z = 10^{-4}$ /秒和 $\lambda = 1$, 对小尺度则取 $z = 10^{-3}$ /秒和 $\lambda = 0$ 。具体计算是在中国科学院计算技术研究所 103 机器中实现的。

设初值为 $u^*(x^*, 0) = 0$, $v^*(x^*, 0) = c^*(x^*, 0) = 0$, $u^*(x^*, 0)$ 分布见图 3, 它是中尺度和小尺度扰动的共有的初始分布。虽然两种尺度运动的初值在无量纲坐标中完全一样,但是在两种尺度中,无因次 x^* 坐标的量不同,而分布各有不同。例如, $v_0 = 10$ 米/秒时, $x^* = 1$ 在中尺度为 100 公里, 在小尺度为 10 公里。图 4 和图 5 分别为小尺度在 $x^* = 0.2$ 处和中尺度在 $x^* = 0.1$, $x^* = 0.2$ 及 $x^* = 0.3$ 处 u^* 的演变。对 $x^* = 0.2$ 这二图一致表明无论是中尺度或小尺度运动,当产生一个不平衡的扰动时,在 $t^* = 2.0$ 以前 u^*

变化极大。在此期間 u^* 从初始的 -0.8 变成了 0.6 。在这段时间內， $\partial u^*/\partial t^*$ 也是非常大的。但自 $t^* = 2.0$ 以后， u^* 只是围绕 $u^* = 0.6$ 作緩慢而微小的振动，振幅极小，这时可以看出 $\partial u^*/\partial t^*$ 非常小。从图 5 还可看到 u^* 趋向于常定的時間是随 x^* 的增大而后延，这說明适应的范围自扰动中心向外扩展，其扩展速度接近于重力波速。

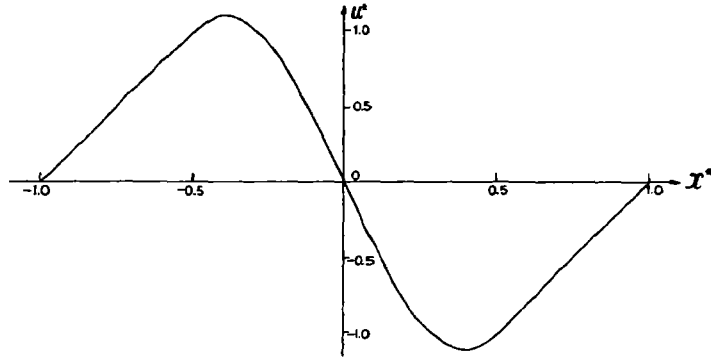


图 3 初始值 u^* 的分布

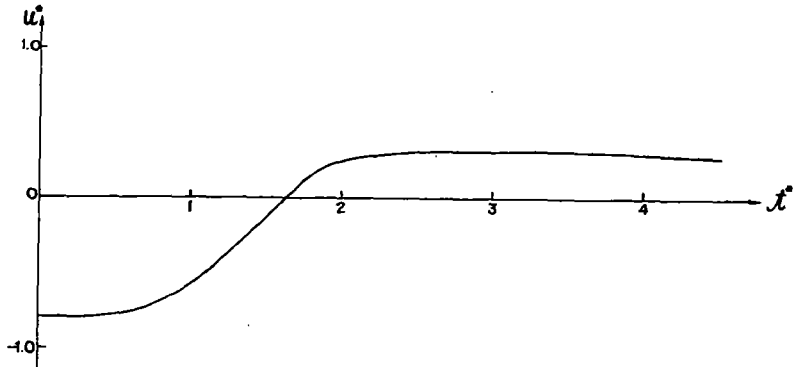


图 4 小尺度 $x^* = 0.2$ 处 u^* 随時間的演变
(初始条件为: $u^*(x^*, 0) = 0, v^*(x^*, 0) = 0, h^*(x^*, 0) = \frac{h}{h_0} = \text{const.}$)

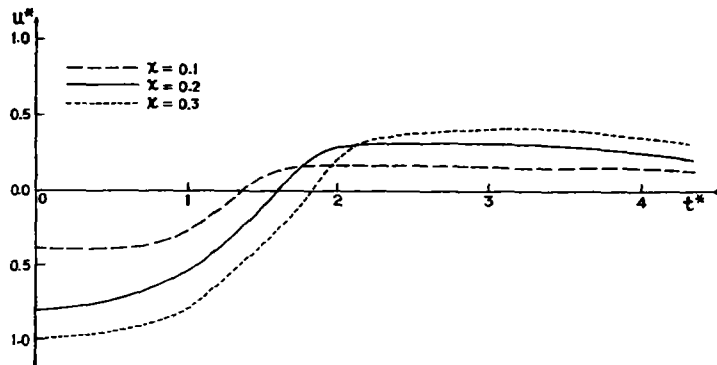


图 5 中尺度 $x^* = 0.1, 0.2$ 和 0.3 处 u^* 随時間的演变
(其他說明同图 4)

小尺度在 $x^* = 0.2$ 和中尺度在 $x^* = 0.1, 0.2$ 及 0.3 的 v^* 和 h^* ($h^* = \frac{h}{h_0}, h_0 = 1000m$) 的演变分别绘于图 6、7 和 8。和 u^* 一样, 对 $x^* = 0.2$ 在 $t^* = 2.0$ 以前它们有很大的变化, 在 $t^* = 2.0$ 以后, 它们基本上保持不变。

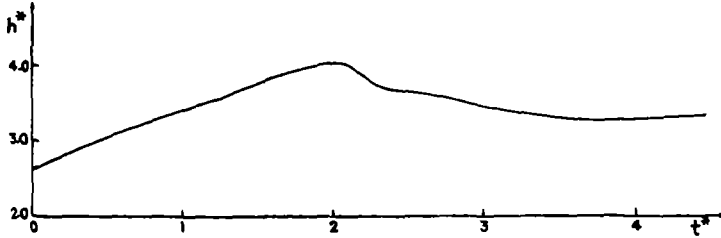


图 6 小尺度 $x^* = 0.2$ 处 h^* 随时间的演变
(说明同图 4)

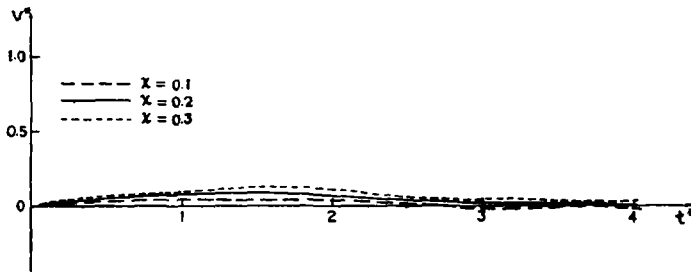


图 7 中尺度 $x^* = 0.1, 0.2$ 和 0.3 处 v^* 随时间的演变
(说明同图 4)

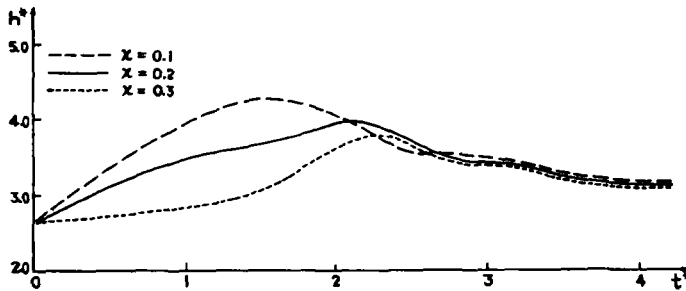


图 8 中尺度 $x^* = 0.1, 0.2$ 和 0.3 处 h^* 随时间的演变
(说明同图 4)

对中尺度运动来说, $t^* = 1$ 相当于 $t = 10^4$ 秒, 对小尺度运动来说, $t^* = 1$ 相当于 $t = 10^3$ 秒, 所以对于中尺度运动适应时间约为 2、3 小时, 对小尺度的运动适应的时间为 20 到 30 分钟。

前面的计算假定了初始扰动 $v^* = 0$, 由于 f 的存在, fv 可能对适应过程产生影响。因此我们又计算了 $v^*(x^*, 0) \approx 0, u^*(x^*, 0) \approx 0, c^*(x^*, 0) = 0$ 的情况, 令 $v^*(x^*, 0) = -u^*(x^*, 0)$, 而初始 u^* 仍用图 3, 计算结果示于图 9、10、11, 将图 9 到 11 与前例计算结果 (图 4—8) 比较, 可以看出不论初始有无 v^* 的扰动, u^*, v^* 和 h^* 的演变性质基本一致。

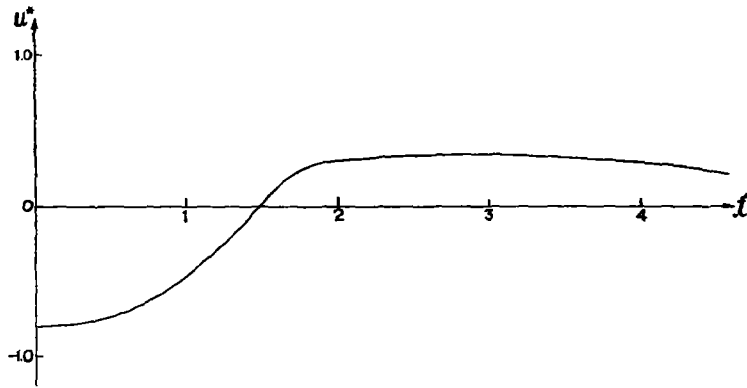


图 9 中尺度 $x^* = 0.2$ 处 u^* 随时间的演变
(初始条件: $u^*(x^*, 0) \approx 0$, $v^*(x^*, 0) = -u^*(x^*, 0)$, $h^*(x^*, 0) = \frac{\bar{h}}{h_0} = \text{const}$)

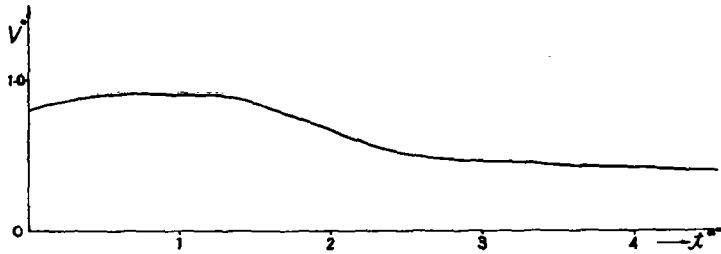


图 10 中尺度 $x^* = 0.2$ 处 v^* 随时间的演变
(初始条件同图 9)

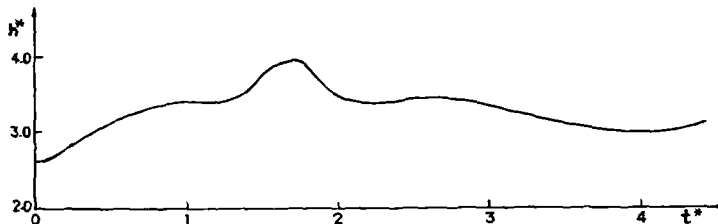


图 11 中尺度 $x^* = 0.2$ 处 h^* 随时间的演变
(初始条件同图 9)

上面的计算再一次指出中小尺度范围内有不平衡的扰动发生后, 在一个时期内场中各要素发生急剧的变化, 场中各要素进行调整, 此后场绕准平衡状态作缓慢的演变。

六、总结和讨论

由本文的研究可以得到几点结论:

1) 正如同大尺度的地转平衡一样, 对于中小尺度运动也同样存在风和气压场相互适应的准平衡关系。

2) 在中小尺度运动中, 当有限地区产生一个力的不平衡扰动时, 场中要素首先会发生急剧的调整, 而后进入力的准平衡阶段。这两个过程截然不同, 前者称为适应过程, 后

者称为准常定过程。

3) 适应过程和准常定过程可以在时间上区分开来。根据计算这个时间分界线,对于一般中等尺度约为两小时左右,而小尺度约为 10 到 20 分钟。

4) 适应过程和准常定过程在物理性质上也截然不同,中尺度与大尺度相近,即适应过程中位势运动占优势,而准常定过程中,则以涡旋运动占优势。对于小尺度,既可为位势运动,亦可为涡旋运动,过程的性质决定于初始条件。

5) 与大尺度地转适应不同,中小尺度的适应状态下可有稳定的辐散存在,而无势运动只是一个特殊情况。

6) 由于平衡态中有散度存在,因而风可以穿过等压线,并且适应状态下的位势部分越强,等压线与风向交角越大。

7) 在中小尺度平衡状态中,风与等能线的关系与大尺度地转风与等压线关系十分相似。因此对中小尺度的运动建议分析 $P\left(= \phi + \frac{u^2 + v^2}{2}\right)$ 场。

参 考 文 献

- [1] Byers, H. R. and Braham R. R., Jr, The Thunderstorm, 1949.
- [2] Rossby, C. G., *Jour. of Marin. Res.*, 1 (1937—1938), 239—263.
- [3] Обухов А. М., *Изв. АН СССР. Сер. Геогр. и Геофиз.*, № 4, 1949.
- [4] Кибиль И. А., *Труды ЦИП.*, вып. 60 1956.
- [5] 曾庆存, *气象学报*, 33 (1963), 163—174.

THE ADAPTATION BETWEEN THE PRESSURE AND THE WIND FIELD IN THE MESO- AND SMALL-SCALE MOTION

YEH TU-CHENG AND LI MAI-TSUN

(Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica)

ABSTRACT

In the large-scale motion of the atmosphere there is a so-called geostrophic adaptation. This paper demonstrates that there is also a process of adaptation between the pressure and the wind field in the meso- and small-scale motion.

From the scale analysis it is found that on the average in the equation of motion the term of the time derivative is one order of magnitude smaller than the main terms in the meso- and small-scale motion. Therefore it may be concluded that the motion of these scales also proceeds slowly under the condition of quasi-balanced forces just as that the large-scale motion proceeds quasi-geostrophically. If, however, in some way this quasi-balanced condition is disturbed, there must be a mechanism to bring the motion back to the quasi-balanced state. For the meso- and small-scale motion the inertia force (velocity advection), the coriolis force and the force of pressure gradient are in quasi-balanced state.

The process to bring the motion to the state of quasi-balance of forces is called adaption process and the motion under quasi-balanced state is called quasi-steady process. The physical nature of these two processes is discussed in this paper. For meso-scale motion it is shown that in the adaption process $D \gg \zeta$, and in quasi-steady process $D \leq \zeta$, where D and ζ are respectively the divergence and the vorticity.

If at certain time the quasi-balanced state is brokendown in certain limited region, further development of this motion may be calculated as an initial value problem. The computation concludes that in the initial short interval of time the meteorological elements undergo vigorous change leading to the reestablishment of the quasi-balanced state and then the motion goes into quasi-steady state.

The equations of quasi-balanced condition for the meso- and small-scale motion may be written as

$$(f + \zeta)v = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (f + \zeta)u = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$(P = gh + \frac{V^2}{2}, \quad V \text{---wind speed}).$$

This suggests that for the motion of this scale P-field should be analyzed instead of height or pressure field.