第34卷 第4期 气 象 学 报 Vol. 34, No. 4
1964年11月 ACTA METEOROLOGICA SINICA November, 1964

关于一些天气預报方程的定解問題*

杜行远 周紫东 丑紀范
(中央气象局气象科学研究所)

提 要

借助于正定算子的一些特性，在本文內討論了一些天气預报方程定解問題的解的存在性和唯一性. 在一些特殊情况下，作者能够比較某种模式与另一种模式的优缺点，指出了在数值預报工作中采用的一些边界条件的不合理性. 作者还得到，在求解三度空間內位势高度变化的問題时，作为大气上边界条件，取表达式(23)就足可以了.

一、

討論天气預报方程定解問題的解是否存在和唯一的問題，具有很大的实践意义. 显然，只有具有存在和唯一的解的定解問題，才有資格用来在实际工作中作数值預报. 如果提出的数值預报方程，它的定解問題的解不存在，或者不唯一，那么就不应当把它看作是一个合格的預报模式. 借助于对天气預报方程的定解問題的研究，在一些情况下，能够多快好省地判断各种預报方案的优劣，不必經过大量的試算、比較，就可以預見到各个方案可能有的預报效果.

在本文中，我們将利用預报方程中微分算子的正定性，来討論定解問題的解的存在性和唯一性. 从数理方程論[1]中，我們知道，使物体变形，必須消耗功，描写这种現象的算子，是正算子；正算子并不能排除以极小的功使物体产生任意大的变形的可能性. 排斥这种可能性的是正定算子. 正定算子意味着，欲使物体变形，必須作功，同时必須作充分大的功，才能使物体产生任意事先指定大的变形. 正定算子一定也是正算子，但正算子不一定是正定算子. 算子的正定性，是保証定解問題的解存在且唯一的充分条件.

保証数值預报方程定解問題的解存在且唯一的充分条件是：要求預报方程具有的算子是正定算子. 这意味着，必須有动力作用（如渦度平流）或热力作用（如温度平流）才能引起气压变化，而且只有較大的动力或热力作用，才能产生气压場較大的变化.

在实际数值預报中，一般是以等压面的位势高度H作为預报对象的. 在本文中，我們则以高度傾向$q=\dfrac{\partial H}{\partial t}$作为待求的未知函数. 这就是說，我們是把对$H$的非綫性預报方程，当作是$q$的綫性方程来討論. 但这并不妨碍我們将在这里得出的結果，应用到对H的实际預报工作中. 綫性方程为非綫性方程之特殊情况，非綫性方程可以具有一些为綫性方程所沒有的特性，但是綫性方程所具备的特性，一般也都为非綫性方程所具备. 在气象

* 本文1963年7月27日收到.

工作中[2]，对綫性方程的一些研究成果，例如大气运动的稳定性及其波动解，差分格式的选取等等，能够应用于非綫性問題，便是很好的說明.

我們先从預报业务中常用的、比較簡单的正压模式开始討論.

二、

若以Δ和J分別代表平面拉普拉斯和雅科宾算符，以g表示重力加速，l表示地轉参数，则准地轉正压預报方程可写作：

$$-\Delta q = J\left(H, \frac{g}{l}\Delta H + l\right). \tag{1}$$

如果預报区域不是全球的話，那么对方程(1)需要給出边界条件. 以Ω表示預报区域，以s表示其边界. 那么，一般可将边界条件写作：

$$q|_s = 0, \tag{2}$$

或

$$\left.\frac{\partial q}{\partial \nu}\right|_s = 0. \tag{3}$$

ν表示s的法綫方向.

文献[1]中已証明，算子$-\Delta$在条件(2)下是正定的，也就是說，此时方程(1)的解存在且唯一. 但若采用边界条件(3)，則在一般情况下，方程(1)是沒有解的，因为此时不能保証$-\Delta$是正算子. 在边界条件(3)下，欲使方程(1)有解，还必須要求滿足条件：

$$\iint_\Omega J\left(H, \frac{g}{l}\Delta H + l\right) d\Omega = 0. \tag{4}$$

若(4)式成立，則在条件(3)下，方程(1)可以有无穷多个解，彼此之間相差一个常数. 这种解的任意性，容易引起等压面普遍降低或普遍升高等不正常的現象. 为了克服解的这种任意性，还必須要求我們的解滿足关系式：

$$\iint_\Omega q\, d\Omega = 0. \tag{5}$$

由于水平风速輻散为“0”，則利用奥氏特拉格拉斯基公式，可将条件(4)写作：

$$\oint_s \left(\frac{g}{l}\Delta H + l\right) \mathbf{V}\cdot \nu\, ds = 0, \tag{6}$$

这里

$$\mathbf{V} = \left(-\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x}\right).$$

显然，如果預报区域不是全球的話，那么条件(4)，或与之等价的条件(6)，一般是不能成立的. 这就是說，我們不应当采用边界条件(3)，因为此时預报方程(1)可能无解.

在文献[4]中，給出了用不同的边界条件，在电子計算机上，求解方程(1)的一些实际的預报例子. 得到的結果是：用边界最外两圈上$q = 0$，或用最外第一圈上$q = 0$，第二圈上$J = 0$的边界条件时，預报效果比較好；如果用預报区域內部的q值，外推以定出边界两圈上的q值，或虽令在边界第一圈$q = 0$，而却将第三圈上的J值，外送作为第二圈上的J值，那么都得到較坏的預报結果. 注意到q主要是由J所决定，那么，我們知道这些結果都不是偶然的.

如果考虑整层大气輻散效应,那么預报方程变为:

$$-(\Delta-\mu^2)q=J. \tag{7}$$

μ^2 为正的常数,利用格林公式可知:

$$-\iint_{\Omega} q(\Delta-\mu^2)q d\Omega=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega+$$

$$+\mu^2\iint_{\Omega} q^2 d\Omega-\oint_s q\frac{\partial q}{\partial \nu}\,ds.$$

无論是采用边界条件(2)或者是(3),上式右端第三項沿边界的积分恆为零,而第一項总是大于零,于是我們恆有:

$$-\iint_{\Omega} q(\Delta-\mu^2)q d\Omega \geqslant \mu^2\iint_{\Omega} q^2 d\Omega.$$

其中等号只有当 $q\equiv 0$ 时才成立,这就是說,預报方程(7)式左端的算子 $-(\Delta-\mu^2)$ 总是正定的,即方程的解总是存在而且唯一. 由此看来,考虑整层大气輻散效应,非但在物理上可以抑制超长波的后退,用数值方法去求解其相应之差分方程时收斂快[2]. 而且在数学理論方面,也是有根据的.

下面再对三度空間內的天气預报方程,进行討論.

三、

三度空間內的預报方程,可以写作[10]:

$$-\frac{\partial}{\partial \zeta}\zeta^2\frac{\partial q}{\partial \zeta}-\Delta q=F(\vartheta,\lambda,\zeta). \tag{8}$$

边界条件是:

1) 当 $\zeta=0$ 时, $\zeta^2\dfrac{\partial q}{\partial \zeta}=0$, (9)

2) 当 $\zeta=1$ 时, $\zeta\dfrac{\partial q}{\partial \zeta}+\alpha q=f(\vartheta,\lambda)$, (10)

3) 在 $\vartheta=0$ 和 $\vartheta=\pi$ 时,函数不依賴于經度 λ. 此外,函数对 λ 是以 2π 为周期的. (11)

这里 $0\leqslant\zeta\leqslant 1$ 为以海平面平均气压为单位的垂直坐标, $F(\vartheta,\lambda,\zeta)$ 包括温度平流和渦度平流, $f(\vartheta,\lambda)$ 包括地面温度平流和考慮地形作用的爬坡风等, α 为与大气靜力稳定度有关的参数.

方程(8)是具有非齐次边界条件的,在 $\zeta=0$ 面上退化的橢圓型方程,我們先把它化为具有齐次边界条件的方程,以便于利用格林公式,来討論算子的正定性,为此,設函数 ψ 在預报区 Ω 內($0<\vartheta<\pi$; $0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi$; $0<\zeta<1$) 有連續的二級微商,且在 Ω 的边界 s 上滿足边界条件(9),(10)和(11),作函数

$$Q=q-\psi,$$

那么,对 Q 有方程:

$$-\frac{\partial}{\partial \zeta}\zeta^2\frac{\partial Q}{\partial \zeta}-\Delta Q=\Phi(\vartheta,\lambda,\zeta), \tag{12}$$

$$\Phi(\vartheta, \lambda, \zeta) = F(\vartheta, \lambda, \zeta) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\zeta^2 \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \Delta\psi.$$

边界条件是：

$$\zeta = 0 \text{ 时}, \quad \zeta^2 \frac{\partial Q}{\partial \zeta} = 0, \tag{13}$$

$$\zeta = 1 \text{ 时}, \quad \zeta \frac{\partial Q}{\partial \zeta} + \alpha Q = 0, \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right|_{\vartheta=0} = \left.\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right|_{\vartheta=\pi} = 0, \tag{15}$$

$$Q|_{\lambda} = Q|_{\lambda+2\pi}. \tag{16}$$

(12)式就是具有齐次边界条件的在 $\zeta = 0$ 面上退化的椭圆型方程，現在我們討論它左端的微分算子

$$L = -\frac{\partial}{\partial \zeta}\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} - \Delta$$

的正定性．由格林公式得：

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} QLQ \sin\vartheta d\vartheta\, d\lambda\, d\zeta &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)^2 + \right.\\ &\left. + \zeta^2\left(\frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right)^2\right]\sin\vartheta d\vartheta\, d\lambda\, d\zeta - \int_0^1\int_0^{2\pi}\left.\left(Q\sin\vartheta\frac{\partial Q}{\partial \vartheta}\right)\right|_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\lambda\, d\zeta - \\ &- \int_0^1\int_0^{\pi}\left.\left(Q\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)\right|_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi}\frac{1}{\sin^2\vartheta}d\vartheta\, d\zeta - \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left.\left(Q\zeta^2\frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right)\right|_{\zeta=0}^{\zeta=1}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda.\end{aligned} \tag{17}$$

利用边界条件(13)—(16)，可知上式右端沿边界 S 的积分等于

$$-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Q\left.\frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=1}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = \alpha\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left.Q^2\right|_{\zeta=1}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda,$$

即当 $\alpha =$ 常数 >0 时，此面积分不会得負值．

显然(17)式右端第一項在 Ω 內的体积分亦不会小于零，因此，恆有

$$\iint_{\Omega} QLQ\, d\Omega \geqslant 0. \tag{18}$$

等号只有当 Q 恆为常数时才能成立，但 $\alpha > 0$，故由(14)式知此时必 $Q \equiv 0$，即 L 至少是正算子，按文献[5]中的方法，不难証明此时 L 且为正定算子，即若取 $\alpha > 0$，則預报模式(8)—(11)的提出是合理的．

若置 $\alpha = 0$，則此时連算子 L 的正性也无法得到保証．因为当 $Q = c$（常数）$\neq 0$ 时，(18)式中的等号是成立的；即若令 $\alpha = 0$，則我們沒有充分的理由相信預报模式(8)—(11)是合理的，此时求出来的气压傾向可以相差一个任意常数，当 $\alpha = 0$ 时，方程(8)的一些对 q 的精确解也便变得毫无意义[6]．順便指出，文献[7]中所得到的結果是要求 $0 < \alpha < 1$，比我們这里只要求 $\alpha > 0$ 的条件較为苛刻，这是因为我們討論的更为广泛，还包括了微分方程的广义解在內．

当 $\alpha = 0$ 时欲使 L 为正或正定算子，还必須要求被 L 所作用之函数 Q 满足条件

$$\iint_{\Omega} Q d\Omega = 0. \tag{19}$$

但此时对方程(12)式右端之函数 Φ 亦須提出須满足之条件,对(12)式之两端在 Ω 內求积分,并利用格林公式及边界条件(13)—(15),卽得

$$\iint_{\Omega} \Phi(\vartheta, \lambda, \zeta) d\Omega = 0. \tag{20}$$

为需強加于函数 Φ 之条件.

因 ψ 亦属于可被算子 L 所作用之函数,且满足边界条件(9)—(11),故当 $\alpha = 0$ 时,为了使 L 为正或正定算子对 ψ 亦有条件:

$$\iint_{\Omega} \psi d\Omega = 0,$$

$$\iint_{\Omega} L\psi d\Omega = -\iint_{\zeta=1} f(\vartheta, \lambda) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda.$$

于是由(19)—(20)不难推得当 $\alpha = 0$ 时,預报模式(8)—(11)所必須满足的条件是:

$$\iint_{\Omega} q d\Omega = 0, \tag{21}$$

及

$$\iint_{\Omega} F d\Omega = -\iint_{\zeta=1} f(\vartheta, \lambda) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda. \tag{22}$$

当 $F(\vartheta, \lambda, \zeta)$ 和 $f(\vartheta, \lambda)$ 只含有平面雅科宾型的項,条件(22)式是成立的,因为此时 $\iint_{\Omega} F d\Omega$ 及 $\iint_{\zeta=1} f \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda$ 皆等于零. 但是,当 F 和 f 內还含有其它(如考虑乱流交换和地面摩擦)的項(或預报区域不是全球),那么条件(22)一般是不会满足的.

我們得到的結論是: 在預报模式(8)—(11)中,一般应取 $\alpha > 0$, 只有在特定情况下,卽如 F 及 f 只含雅科宾型的項而且預报区域为全球时,才可以取 $\alpha = 0$[8,9],值得注意的是卽使是在这种特定情况下,取 $\alpha > 0$ 比取 $\alpha = 0$ 所得到的結果更合理些[10].

这是对下边界条件 $\zeta = 1$ 时的情况,至于在 $\zeta = 0$ 处的上边界条件, 容易看出,并不一定要取作(9)式或(13)式的形式,只要满足条件

$$\iint_{\zeta=0} \zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda = 0 \tag{23}$$

卽可.

四、

上面所談 $\alpha = 0$ 的情况,只是在下边界条件(10)中所作的近似,在預报方程(8)中,并不能取 $\alpha = 0$, 因为如取 $\alpha = 0$, 那么就根本推不出(8)式来.

現在簡单討論一下 α 眞正等于零时的情况, 此时热力学第一方程中不再出現含有垂直速度的項. 假定靜力平衡条件仍然成立,那么在渦度方程中所包含的水平輻散項,就不再能够借助于热力学第一方程来把它消掉. 这就意味着, 此时如欲建立斜压大气預报模式, 必須能直接算出 $\dfrac{\partial \tau}{\partial \zeta}$ 或 $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 才可以. $\tau = \dfrac{d\zeta}{dt}$ 为 ζ 坐标中的"鉛直速度".

$$\text{如令}\frac{\partial \tau}{\partial \zeta}\text{或}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\text{；那么正压涡度预报方程 }\Delta q=-A_{\eta}, \tag{24}$$

在大气中任何一个等压面上均成立，但此时涡度平流 A_{η} 和温度平流 A_T 之間必須滿足一定之关系式．因为此时热力学第一方程可以写作

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta}=-A_T. \tag{25}$$

由(24)，(25)式可得 A_{η}，A_T 应滿足之关系式为

$$\frac{\partial A_{\eta}}{\partial \zeta}=\Delta A_T. \tag{26}$$

可惜，在一些令 $\alpha=0$ 以考虑云层对气压变化的影响的工作中[3]，对关系式(26)并沒有能給予充分的注意．

*　　*　　*

本文曾經中国科学院数学研究所王光寅同志提供宝貴意見，特此致謝！

参　考　文　献

[1] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, ГИТТЛ Москва, 1957.
[2] Юдин М. И., Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды, ГМИЗД Ленинград, 1963.
[3] Каган Р. Л., *Труды ГГО*, **99** (1959), 15—36.
[4] 叶篤正等，北半球冬季阻塞形势的研究，科学出版社，(1962)，126—128.
[5] Михлин С. Г., *Вестник ленинградского университета*, **8**(1954), 19—48.
[6] Добрышман Е. М., *Изв. АН СССР*, **2**(1961), 294—306.
[7] Немчинов С. В., *Труды ЦИП*, **102** (1962), 64—70.
[8] Блинова Е. Н., *Доклады АН СССР*, **110** (1956), 975—977.
[9] 朱永禔，气象学报，**31** (1961)，216—233.
[10] 曾庆存、朱永禔，*Изв. АН СССР*, **1** (1961), 154—156.

К ВОПРОСУ О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

Ду Син-юань　Чжоу Ци-дун　Чоу Ди-фан

(Научно-исследовательский институт метеорологии центрального метеорологического управления)

Резюме

С помощью свойств положительно-определённых операторов, в данной работе рассмотрены вопросы существования и единственности решений некоторых уравнений прогноза погоды. В некоторых частных случаях авторам удалось выяснить преимущества одних прогностических моделей над другим. В частности выяснена нерациональность постановки некоторых граничных условий, применяемой в численных методах прогноза погоды. Получено также, что для решений пространственной задачи прогноза погоды (геопотенциалов) в качестве граничного условия на верхней поверхности атмосферы достаточно взять выражение (23).