第 34 卷 第 4 期　　气象学报　　Vol. 34, No. 4
1964 年 11 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　November, 1964

論 $\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0$ 方程的所謂"先向前差、后中央差"差分格式的稳定性和收斂性*

廖洞賢
(中央气象局气象研究所)

提要

針对 $\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0$ 方程，本文首先討論了在一般情形下所謂"先向前差、后中央差"差分格式的稳定性，并給出了稳定的条件．其結果和一般只用中央差分的情形有所不同．利用三种差分格式进行比較，发現目前广泛应用的用向前差計算第一个时間步长，以后全用中央差的格式是最差的；当 $\lambda(=u\Delta t/\Delta s)\to 1-0$ 时，計算并不稳定．如果用另两种格式中任一种代替向前差，則可以避免这个困难．其中又以"逆 2—3 格式"較好．

一、引　言

对于方程

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\mathbf{V}\cdot\nabla\zeta \tag{1}$$

而言，一般所謂"先向前差、后中央差"的差分格式，是指在第一个时間步长內，其所含的时間微商用向前差，以后用中央差，而空間微商全用中央差表示的格式．以式表之，即

$$\zeta_{m,n}^{(\tau+1)}-\zeta_{m,n}^{(\tau)}=-\frac{\lambda_1}{2}\nabla_x\zeta_{m,n}^{(\tau)}-\frac{\lambda_2}{2}\nabla_y\zeta_{m,n}^{(\tau)},\ \text{当}\ \tau=0\ \text{时} \tag{2}$$

$$\zeta_{m,n}^{(\tau+1)}-\zeta_{m,n}^{(\tau-1)}=-\lambda_1\nabla_x\zeta_{m,n}^{(\tau)}-\lambda_2\nabla_y\zeta_{m,n}^{(\tau)},\ \text{当}\ \tau\geqslant 1\ \text{时} \tag{3}$$

这里 $\lambda_1=u_{m,n}^{(\tau)}\Delta t/\Delta s$；$\lambda_2=v_{m,n}^{(\tau)}\Delta t/\Delta s$；$\nabla_x(\quad)_{m,n}^{(\tau)}=(\quad)_{m+1,n}^{(\tau)}-(\quad)_{m-1,n}^{(\tau)}$；$\nabla_y(\quad)_{m,n}^{(\tau)}=(\quad)_{m,n+1}^{(\tau)}-(\quad)_{m,n-1}^{(\tau)}$；其他都是气象上常用符号．

格式(3)的稳定性問題，很早就有人（如 Charney[1] 等）討論过．他們証明在 $u_{m,n}^{(\tau)}$，$v_{m,n}^{(\tau)}$ 視作常数时，如

$$\frac{|\mathbf{V}|\Delta t}{\Delta s}<\frac{1}{\sqrt{2}},$$

則計算是稳定的，因而也是收斂的．Gates[4] 还証明格式(2)是无条件不稳定的．但格式(2)、(3)联合使用时，其稳定性和收斂性的情况尚沒有人討論过．

另外，在实际工作中，人們发現格式(2)、(3)联合使用时有不少缺点．譬如，用它制作的預报常有波幅随时間作明显的振蕩、波速較实况偏慢，等等[2,3]．对此，Gates[4,5] 曾对单波情况作了理論上的論証．

* 本文 1964 年 3 月 17 日收到，5 月收到修改稿．

这說明了这种作法存在着一定的問題．如何对这种作法进行一般性的討論，并从而选取較优的差分格式，显然是很必要的．

二、一般的提法

首先我們考虑一維且风速可視作常数的情形．

設 $\zeta_m^{(1)}$ 是任意选取的一組有限数．令

$$e_m^{(\tau)}=\zeta_m^{(\tau)}-\tilde{\zeta}_m^{(\tau)}, \tag{4}$$

其中 $\tilde{\zeta}_m^{(\tau)}$ 是方程(1)在一維情形

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-u\frac{\partial\zeta}{\partial x} \tag{1'}$$

的解；$\zeta_m^{(\tau)}$ 是格式(3)在同一风速时的解．利用 Taylor 級数从(3)式減去(1′)式則有

$$\begin{aligned} e_m^{(\tau+1)}-e_m^{(\tau-1)} &= -\lambda_1\nabla_x e_m^{(\tau)}+2\Delta tO(\Delta t^2+\Delta s^2)\\ &= -\lambda_1\nabla_x e_m^{(\tau)}+2\Delta tQ^{(\tau)}, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $Q^{(\tau)}=O(\Delta t^2+\Delta s^2)|_{\tau=\tau}$，可以認为 $Q^{(0)}=0$．

上式是格式(3)的誤差方程．令

$$\tau=0\ \text{时},\ e_m^{(0)}=0;\ \tau=1\ \text{时},\ e_m^{(1)}\ \text{是任意給定的一組有限数}, \tag{6}$$

則格式(3)的稳定性問題轉化为在条件(6)下，方程(5)的解的稳定性問題．

为了避免人为边界条件对誤差方程造成的影响．設在 $0\leqslant x\leqslant L$ 的范围，$0\leqslant t\leqslant T$ 的时間內

$$\zeta_{m\pm K}^{(\tau)}=\zeta_m^{(\tau)},\quad \tilde{\zeta}_{m\pm K}^{(\tau)}=\tilde{\zeta}_m^{(\tau)},\quad \tau=1,2,\cdots,$$

其中 $K=\frac{L}{\Delta s}$，K 是偶整数．这样，我們有

$$e_{m\pm K}^{(\tau)}=e_m^{(\tau)},\quad \tau=1,2,\cdots. \tag{7}$$

为了方便起見，下面我們略去 $e_m^{(\tau)}$ 的下标，并規定 $\lambda=\lambda_1=\frac{u\Delta t}{\Delta s}$，$\lambda$ 是一大于或等于零的参数．

考虑一般討論稳定性的方法沒有涉及稳定格式和不稳定格式联合使用的情形，采用 Douglass 处理高維热传导問題的方法[6]，令

$$e^{(\tau)}=\sum_{\nu=0}^{\tau-1}e^{(\nu,\tau)}+\tilde{e}^{(\tau)}, \tag{8}$$

其中 $e^{(\nu,\tau)}$、$\tilde{e}^{(\tau)}$ 都是以 L 为周期的函数，它們各由如下方程式所决定．

$$\begin{cases} e^{(\nu,\tau)}=0, & \text{当}\ \tau\leqslant\nu \quad (9\text{a})\\ e^{(\nu,\tau)}=2\Delta tQ^{(\nu)}, & \text{当}\ \tau=\nu+1 \quad (9\text{b})\\ e^{(\nu,\tau+1)}=e^{(\nu,\tau-1)}-\lambda\nabla_x e^{(\nu,\tau)}, & \text{当}\ \tau>\nu+1 \quad (9\text{c}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{e}^{(\tau+1)}=\tilde{e}^{(\tau-1)}-\lambda\nabla_x\tilde{e}^{(\tau)}, & (10\text{a})\\ \tilde{e}^{(0)}=0, & (10\text{b})\\ \tilde{e}^{(1)}=e^{(1)}. & (10\text{c}) \end{cases}$$

容易看出，方程(9)、(10)的解就是方程(5)在条件(6)、(7)之下的解．如果方程(1′)和格式(3)各有唯一解，則方程(5)也有唯一解．这样，方程(5)和方程(9)、(10)的解在格网点

上的值就一定相同．所以，我們仅就这两个方程进行討論就够了．

三、差分格式的稳定性和收斂性

在(9a)到(10c)的諸式中，典型的方程是(9b)和(10a)．如果了解其解的性质，則方程(9)、(10)的解的性質立即可以得到．为此，可以进行如下一些工作．

首先，从条件(7)和前面的假定，我們可以把 $e^{(\nu,\tau)}$、$\tilde{e}^{(\tau)}$、$Q^{(\tau)}$ 等表示成

$$\begin{Bmatrix} e^{(\nu,\tau)} \\ \tilde{e}^{(\tau)} \\ Q^{(\tau)} \end{Bmatrix} = \sum_{k=-K/2}^{K/2} \begin{Bmatrix} E_k^{(\nu,\tau)} \\ \tilde{E}_k^{(\tau)} \\ q_k^{(\tau)} \end{Bmatrix} \exp\left(ik\frac{2\pi}{L}X\right), \tag{11}$$

其中

$$E_{-k}^{(\nu,\tau)} = \bar{E}_k^{(\nu,\tau)};\ \tilde{E}_{-k}^{(\tau)} = \bar{\tilde{E}}_k^{(\tau)};\ q_{-k}^{(\nu)} = \bar{q}_k^{(\nu)};\ \overline{(\quad)}\text{表示共軛复数}.$$

再引入如下定义：

$$\|\varphi\| = (\varphi,\ \varphi) = \left(\sum_{m=0}^{K-1} |\varphi_m|^2\right)^{1/2},$$

我們可以得到如下的引理和定理．

引理 $\|e^{(\nu,\nu+1)}\| = 2\Delta t\|Q^{(\nu)}\|$

証 按前面的定义，我們有

$$\|e^{(\nu,\nu+1)}\| = (e^{(\nu,\nu+1)},\ e^{(\nu,\nu+1)}) = 2\Delta t(Q^{(\nu)},\ Q^{(\nu)}) = $$
$$= 2\Delta t\|Q^{(\nu)}\|.$$

定理 設 $\tilde{e}^{(\tau)}$ 是方程(10a)在条件(10b)、(10c)下的解，如 $1/\sqrt{1-\lambda^2}$ 为有限数，$\lambda<1$，則

$$\|\tilde{e}^{(\tau)}\| = C_1\|\tilde{e}^{(1)}\|$$

成立，其中 C_1 是一个有界的非負数；如 $\lambda \geqslant 1$，則除非 $\|\tilde{e}^{(1)}\| = 0$，$\|\tilde{e}^{(\tau)}\|$无界．

証 把(11)式代入方程(10a)則有

$$\tilde{E}_k^{(\tau+1)} + 2i\sigma_k\tilde{E}_k^{(\tau)} - \tilde{E}_k^{(\tau-1)} = 0. \tag{12}$$

解之則

$$\tilde{E}_k^{(\tau)} = A(\gamma_k - i\sigma_k)^\tau + B(\gamma_k + i\sigma_k)(-1)^\tau, \tag{13}$$

其中

$$\sigma_k = \lambda\sin k\frac{2\pi}{L}\Delta s;\ \gamma_k = \left(1 - \lambda^2\sin^2 k\frac{2\pi}{L}\Delta s\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从条件(10b)、(10c)可以得到

$$A = \frac{1}{2\gamma_k}\tilde{E}_k^{(1)},\quad B = -\frac{1}{2\gamma_k}\tilde{E}_k^{(1)}. \tag{14}$$

代入(13)式則

$$\tilde{E}_k^{(\tau)} = \frac{1}{2\gamma_k}[(\gamma_k - i\sigma_k)^\tau - (\gamma_k + i\sigma_k)^\tau(-1)^\tau]\tilde{E}_k^{(1)}(\text{当}\ \sigma_k \neq 1). \tag{15}$$

現在，我們分三种情形来討論

1.$\sigma_k > 1$ 令 $\gamma_k = iS_k$，$S_k > 0$，則 $\sigma_k > S_k$，这时

$$\widetilde{E}_k^{(\tau)}=\frac{1}{2S_k}i^{\tau-1}[(S_k-\sigma_k)^\tau-(-S_k-\sigma_k)^\tau]\widetilde{E}_k^{(1)}$$
$$=\frac{1}{2}(-i\sigma_k)^{\tau-1}\left(-\frac{\sigma_k}{S_k}\right)\left[\left(1-\frac{S_k}{\sigma_k}\right)^\tau-\left(1+\frac{S_k}{\sigma_k}\right)^\tau\right]\widetilde{E}_k^{(1)}$$
$$=\begin{cases}(-i\sigma_k)^{\tau-1}\left(+\frac{\sigma_k}{S_k}\right)\left[C_1^\tau\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right)+C_3^\tau\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right)^3+\cdots+C_{\tau-2}^\tau\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right)^\tau\right]\widetilde{E}_k^{(1)}, & \tau=\text{奇数}\\ (-i\sigma_k)^{\tau-1}\left(-\frac{\sigma_k}{S_k}\right)\left[C_1^\tau\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right)+C_3^\tau\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right)^3+\cdots+C_{\tau-1}^\tau\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right)^{\tau-1}\right]\widetilde{E}_k^{(1)}. & \tau=\text{偶数}\end{cases}$$

故

$$|\widetilde{E}_k^{(\tau)}|>C_1^\tau|\sigma_k|^{\tau-1}|\widetilde{E}_k^{(1)}|,$$

其中 $C_q^p=p!/(p-q)!q!$.

上式說明当 $\tau\to\infty$ 时，如 $|\widetilde{E}_k^{(1)}|\neq 0$，則 $|\widetilde{E}_k^{(\tau)}|\to\infty$.

2\. $\sigma_k=1$　　这时(12)式的解是

$$\widetilde{E}_k^{(\tau)}=(-i)^{\tau-1}\tau\widetilde{E}_k^{(1)}. \tag{16}$$

显然，如 $\widetilde{E}_k^{(1)}\neq 0$，和 $\sigma_k>1$ 的情形一样，$\tau\to\infty$ 时，$|\widetilde{E}_k^{(\tau)}|\to\infty$.

3\. $\sigma_k<1$　　这时 σ_k, γ_k 可以写作

$$\sigma_k=\sin\alpha,\quad \gamma_k=\cos\alpha.$$

代入(15)式則

$$\widetilde{E}_k^{(\tau)}=\frac{1}{2\gamma_k}[\exp(-i\tau\alpha)-(-1)^\tau\exp(i\tau\alpha)]\widetilde{E}_k^{(1)}$$
$$=\frac{\widetilde{E}_k^{(1)}}{2\gamma_k}\begin{cases}2\cos\tau\alpha, & \tau=\text{奇数}\\ -2i\sin\tau\alpha. & \tau=\text{偶数}\end{cases} \tag{17}$$

所以，如对所有的 k，都有 $\sigma_k<1$，則

$$\|\tilde{e}^{(\tau)}\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\|\tilde{e}^{(1)}\| \tag{18}$$

成立．这时只要 $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ 是有限数，則有

$$\|\tilde{e}^{(\tau)}\|\leqslant C_1\|\tilde{e}^{(1)}\|. \tag{19}$$

如 $\lambda\geqslant 1$，則只要 $\|\tilde{e}^{(1)}\|\neq 0$，当 τ 增加时，$\|\tilde{e}^{(\tau)}\|$ 必然无界．定理証毕．

可是，在 $\lambda\to 1$ 时的情形怎么样呢？

从(17)式我們有

$$\widetilde{E}_k^{(\tau)}=\begin{cases}[C_0^\tau\cos^{\tau-1}\alpha-C_2^\tau\sin^2\alpha\cos^{\tau-3}\alpha+\cdots+(-1)^{\frac{\tau-1}{2}}\tau\sin^{\tau-1}\alpha]\widetilde{E}_k^{(1)}, & \tau=\text{奇数}\\ -i[C_1^\tau\sin\alpha\cos^{\tau-2}\alpha-C_3^\tau\sin^3\alpha\cos^{\tau-4}\alpha+\cdots+(-1)^{\frac{\tau}{2}-1}\tau\sin^{\tau-1}\alpha]\widetilde{E}_k^{(1)}, & \tau=\text{偶数}\end{cases}$$

所以，必有一分量(如 $k=K/4$ 时)使

$$\lim_{\lambda\to 1-0}\widetilde{E}_k^{(\tau)}=\lim_{\gamma_k\to 0}\widetilde{E}_k^{(\tau)}=\left\{\begin{matrix}(-1)^{\frac{\tau-1}{2}}\tau\widetilde{E}_k^{(1)}, & \tau=\text{奇数}\\ -i(-1)^{\frac{\tau}{2}-1}\tau\widetilde{E}_k^{(1)}, & \tau=\text{偶数}\end{matrix}\right\}=(-i)^{\tau-1}\tau\widetilde{E}_k^{(1)}. \tag{17'}$$

不难看出，如这时 $\widetilde{E}_k^{(1)}$ 不等于零，随着 τ 的增加，$\|\tilde{e}^{(\tau)}\|$ 也是无界的.

有了上面这些結果，我們可以很方便地証明格式(3)的稳定性．用和上面同样的方法，利用引理，方程(9c)在条件(9a)、(9b)下也存在有限数 C_2，使

$$\|e^{(\nu,\tau)}\| = C_2\|e^{(\nu,\nu+1)}\| = O(\Delta t\|Q^{(\nu)}\|). \tag{20}$$

从(19)和(20)式立即得到

$$\begin{aligned}\|e^{(\tau)}\| &\leqslant \sum_{\nu=0}^{\tau-1}\|e^{(\nu,\tau)}\| + \|\tilde{e}^{(\tau)}\| \\ &\leqslant \max(C_1,C_2)\left[\Delta t\sum_{\nu=0}^{\tau-1}\|Q^{(\nu)}\| + \|e^{(1)}\|\right] \\ &\leqslant C[T\|Q\| + \|e^{(1)}\|],\end{aligned} \tag{21}$$

其中 $C = \max(C_1,C_2)$; $\|Q\| = \max\limits_{0<\nu<\tau-1}\|Q^{(\nu)}\|$. 所以, $e^{(\tau)}$ 是一致有界的. 即在 $\lambda < 1$ 和上述定理的条件下,格式(3)是稳定的. 容易看出,在 $\lambda \geqslant 1$ 时格式是不稳定的. 在 $\lambda \to 1-0$ 时,格式也是不稳定的.

从不等式(21)还可以証明格式(3)的收斂性. 如

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}}\|e^{(1)}\| = 0, \tag{22}$$

则因 $\lim\limits_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}}\|Q^{(\nu)}\| = 0$、我們有

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}}\|e^{(\tau)}\| = 0. \tag{23}$$

按一般收斂性的定义,即差分解收斂于微分方程的解. 所以, $\zeta_m^{(1)}$ 不能随意选取,必須满足条件(22),否则差分解是不收斂的.

四、几种选取 $\zeta_m^{(1)}$ 值的方法的比較

为了找出較好的选取 $\zeta_m^{(1)}$ 值的方法,我們用格式(2)和用如下两种格式計算 $\zeta_m^{(1)}$ 值的結果进行了比較.

$$\zeta_m^{(\tau+1)} - \zeta_m^{(\tau)} = -\lambda(\zeta_m^{(\tau)} - \zeta_{m-1}^{(\tau)}), \tag{24}$$

$$\zeta_m^{(\tau+1)} - \zeta_m^{(\tau)} = -\frac{\lambda}{2}\nabla_x\zeta_m^{(\tau)} - \frac{\lambda^2}{2}\Delta_x\zeta_m^{(\tau)}, \tag{25}$$

其中 $\Delta_x(\ )_m^{(\tau)} = (\ )_{m+1}^{(\tau)} + (\ )_{m-1}^{(\tau)} - 2(\ )_m^{(\tau)}$.

我們知道方程(1)′的准确解是

$$\tilde{\zeta}(x,t) = \tilde{\zeta}(0, x-ut).$$

对于 $t = \Delta t$ 时刻来説,当 $\lambda \to 1-0$ 时

$$\tilde{\zeta}_m^{(1)} = \tilde{\zeta}_{m-\lambda}^{(0)} \to \tilde{\zeta}_{m-1}^{(0)}.$$

这里我們引用了前面的符号. 对于格式(2)、(24)、(25),则当 $\lambda \to 1-0$ 时分别有

$$\zeta_m^{(1)} = \zeta_m^{(0)} - \frac{\lambda}{2}\nabla_x\zeta_m^{(0)} \ne \zeta_m^{(0)},$$

$$\zeta_m^{(1)} = \zeta_m^{(0)} - \lambda(\zeta_m^{(0)} - \zeta_{m-1}^{(0)}) \to \zeta_m^{(0)},$$

$$\zeta_m^{(1)} = \zeta_m^{(0)} - \frac{\lambda}{2}\nabla_x\zeta_m^{(0)} + \frac{\lambda^2}{2}\Delta_x\zeta_m^{(0)} \to \zeta_m^{(0)}.$$

所以,用格式(2)、(24)、(25)計算的 $e_m^{(1)}$ 值分别有

$$\lim_{\lambda\to 1-0} e_m^{(1)} \ne 0,\quad \lim_{\lambda\to 1-0} e_m^{(1)} = 0,\quad \lim_{\lambda\to 1-0} e_m^{(1)} = 0.$$

把諸 $e_m^{(1)}$ 用形如(11)式的富氏級数展开，从三角函数的正交性容易看出，这时对于格式(2)至少有一分量使 $\lim\limits_{\lambda\to 1-0}|\tilde{E}_k^{(1)}|\neq 0$;而对于格式(24)、(25)所有的分量都有 $\lim\limits_{\lambda\to 1-0}|\tilde{E}_k^{(1)}|=0$. 按(17)式，显然用格式(2)时 $e_m^{(\tau)}$ 会随着 τ 而增加，即計算不稳定. 如引用格式(24)或(25),則对于有限的 τ, 計算是稳定的; 当 $\tau\to\infty$ 时,如所有的 $|\tilde{E}_k^{(1)}|$ 随 $\lambda\to 1-0$ 而減小的程度大于 τ 增长的程度,則仍然是稳定的,否則是不稳定的.

所以,从这些結果来看，用格式(24)或(25)計算 $\zeta_m^{(1)}$ 比用格式(2)来計算有明显的改进.

五、結　論

从前面的討論我們可以得到如下的結論:

1) 对于方程(1)'来說,一般的"先向前差、后中央差"的格式只有在 $\lambda<1$ 时才可能是稳定的. 这时如 $\lim\limits_{\Delta t,\Delta s\to 0}\|e^{(1)}\|=0$, 解是收斂的. 在 $\lambda\geqslant 1$ 时是不稳定的.

2) 当 $\lambda\to 1-0$ 时,用格式(2)、(3)构成的"先向前差、后中央差"差分格式是不稳定的.

3) 当 $\lambda<1,\tau$ 为有限时,用格式(24)、(3)或(25)、(3)构成的"先向前差、后中央差"差分格式是稳定的,也是收斂的,不論 λ 是否趋于 1—0.

不过,用格式(24)計算 $\zeta_m^{(1)}$,由于波幅衰減較大,应用时其限制也大. 用格式(25)計算 $\zeta_m^{(1)}$, 則限制較小,这是比格式(24)优越的地方,应用时須要注意.

最后,作者对楊卯辰同志的热情討論表示感謝.

参　考　文　献

[1] Charney, J. G., Fjørtoft, R. and von Neumann, J., *Tellus*, **2** (1950), 237—254.
[2] Wippermann, F., *Meteorol. Rdsch.*, **8** (1955), 44—48.
[3] Smagorinsky, J., *Monthly Weather Review*, **83** (1955), 53—68.
[4] Gates, W. L., *J. Meteor.*, **16** (1959), 556—568.
[5] Gates, W. L., *J. Meteor.*, **17** (1960), 572—574.
[6] Douglass, J. and Gunn, J. E., *Math. of Computation*, **17** (1963), 71—80.
[7] 北京大学等,計算方法,人民教育出版社,1961.

ON THE STABILITY AND CONVERGENCE OF THE SO-CALLED "FIRST-FORWARD-THEN-CENTERED DIFFERENCE ANALOGUE" FOR THE EQUATION OF THE FORM

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$$

LIAO TUNG-HSIEN

(Research Institute of Meteorology, Central Meteorological Service)

ABSTRACT

By the so-called "first-forward-then-centered difference analogue" for the equation of the form $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ in conventional operation, in meteorology, is meant an analogue, in which the space derivatives are replaced by centered differences, but the time derivative is replaced by a forward difference at the first time step and then by a centered difference. For the sake of investigating the computational stability and convergence of this analogue under two arbitrary initial conditions, an analogue with centered differences in both space and time is discussed. The results show that the analogue is stable when and only when the conditions: $\lambda = \frac{u\Delta t}{\Delta s} < 1$ and $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ being finite, are exactly satisfied, where u is the velocity of the basic current; Δt and Δs are time step and grid length respectively. However, even in a stable case, the difference solution so obtained can not converge to the corresponding exact solution, unless the value of vorticity at the end of the first time step, i.e. $\zeta^{(1)}$, is convergent. For the convenience of comparison, three difference analogues used to compute $\zeta^{(1)}$ are investigated. It is found that the conventional analogue is the worst one of them and when $\lambda \to 1-0$, it is computationally unstable. If any one of the other two up-wind analogues is used in this case, it is computationally stable.