

## 地轉气流中的重力慣性內波

巢紀平 吳欽岳

(中国科学院地球物理研究所) (中国科学技术大学)

### 提 要

本文用一个一維綫性的二层模式,分析了地轉气流中重力慣性內波的动力学性質。討論了重力慣性內波的不穩定性、相速度和羣速度后,指出:

- 1) 当地轉风速大于重力內波波速时,某些尺度的重力慣性內波可以产生不穩定性,这种不穩定性可以用来解释某些中系統的发展。
- 2) 某些波长的重力慣性內波,它的羣速度可以大于相速度;因此在某一地区有中系統发展时,它的能量可以很快地传到下游,而在某下游产生新的系統。

### 一、引 言

一般地将需要考虑地球自轉偏向力的作用,而可以忽略地轉参数随緯度变化的运动称为中尺度运动。这类运动的特征尺度为 $10^1$ — $10^2$ 公里。由于一些具有危险天气(陣性降水、雷暴、陣风等)的天气系統,如雷暴、飈綫等都是属于中尺度运动,因此研究雷暴、飈綫这一类中尺度系統有着重要的实际意义。中尺度雷暴系統的研究,这几年来正受到我国气象工作者的注意,并且在观测、分析等方面都已做了不少的工作。

目前的雷达观测和天气分析,已提出了一些关于雷暴系統的很有意思的現象。如經常观测到:当某处有中尺度系統(雷暴、陣风)在发展时,往往在它們下游也常有相应的系統在发展,即所謂“共鳴型雷暴”就是一例。我們知道,对于大尺度运动来讲,由于羣速度可以大于相速度亦即能量可以先位相速而到达下游,因此产生了所謂的“上游效应”。对于中尺度运动來說,有没有这种类似的机制呢?这是一个值得探討的問題。又如有些观测表明,許多雷暴系統經常在夜間层結相当稳定的条件下发展起来,这些雷暴发展的能量是从那里来的呢?这也是值得探討的問題。

从原則上看,层結大气中的中尺度运动是在重力和地球偏向力的联合作用下发展起来的。因而,上述現象可能是重力慣性內波在大气的具体条件下的一些反映。为此在本文中,我們將通过对地轉风場中的重力慣性內波特征的分析来討論这一些問題。

### 二、基本方程

做为研究的第一步,我們考虑理想流体的正压运动。为了考虑实际大气的层結性,我們取二层不可压缩流体。二层流体的分界面,在大气中的典型例子便是逆温层。令 $\rho_1, \rho_2$ 分别表示上下层流体的密度, $H$ 和 $h$ 分别表示扰动前和扰动后分界面的高度, $u$ 和 $v$ 分别表示下层流体中的运动速度分量。設运动滿足靜力平衡的条件。如果上层流体有足够的厚度,則下层流体的运动将不会使上层流体的运动受到大的影响。这时取作近似,可以假

式上层流体的运动完全不受下层流体运动的影响。做了这样的一些假定后,容易得到下层流体的运动方程为<sup>[1]</sup>:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g^* \frac{\partial h}{\partial x} + fv, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g^* \frac{\partial h}{\partial y} - fu, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

式中:  $x, y$  为笛卡儿坐标轴,  $t$  为时间,  $g^* = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} g$ ,  $g$  为重力加速度,  $f$  为地球的自转参数。

設: 扰动运动是迭加在地转运动

$$u_g = -\frac{g^*}{f} \frac{\partial H}{\partial y} \quad (4)$$

上的,并設:

$$u = u_g + u', \quad v = v', \quad h = H + h'. \quad (5)$$

其中:  $u', v'$  分别为扰动的速度分量;  $h'$  为分界面的扰动高度。将(5)式代入(1)–(3)式后,在扰动不依赖  $y$  和略去二级微量的假定下,得到:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_g \frac{\partial u'}{\partial x} = -g^* \frac{\partial h'}{\partial x} + fv', \quad (6)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u_g \frac{\partial v'}{\partial x} = -fu', \quad (7)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + u_g \frac{\partial h'}{\partial x} + H \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{fu_g v'}{g^*} = 0. \quad (8)$$

或者可以得到对于一个应变量的单一方程为:

$$\mathcal{L}(u', v', h') = 0. \quad (9)$$

式中算子  $\mathcal{L}$  为:

$$\mathcal{L} = \frac{D^3}{Dt^3} - C_0^2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + f^2 \frac{D}{Dt} - f u_g \frac{\partial}{\partial x}. \quad (10)$$

其中:  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $C_0 = \sqrt{g^* H}$  为重力内波波速。方程(9)是我们所要研究的基本方程。Hinkelmann<sup>[2]</sup>曾给出了类似的方程,不过它讨论的是重力惯性外波,而我们现在讨论的是流体内部分界面上的重力惯性内波。

### 三、相速度的公式

設扰动是沿气流的方向传播的,因此可以設(以  $v'$  为例):

$$v'(x, t) = v'_0 e^{ik(x-ct)}. \quad (11)$$

式中:  $k$  为  $x$  方向的波数,  $c$  为相速度。将(11)式代入(9)式后,得到频率公式为:

$$k^2(u_g - c)^3 - (f^2 + c_0^2 k^2)(u_g - c) + f^2 u_g = 0. \quad (12)$$

为了讨论方便,今将(12)式无量纲化,取  $\bar{c} = c/c_0$ , 于是(12)式可以改写为:

$$(F - \bar{c})^3 - (1 + 2R^2)(F - \bar{c}) + 2R^2F = 0. \quad (13)$$

式中:  $R = f/\sqrt{2k}c_0$ ,  $F = u_g/c_0$  为 Froude 数。这是控制地轉风場中重力慣性內波动力学性质的两个基本参数。由于象颶綫等中尺度系統是一种浅层的现象, 它的垂直厚度  $H$  很小,  $c_0$  一般不会太大; 因此,  $F > 1$  的情况也是可以出現的。按一般, 我們称  $u_g > c_0$  的地轉气流是超临界流, 而  $u_g < c_0$  的地轉气流为次临界流。在不同的  $c_0$  值下,  $R$  和波长  $L$  的轉換見下表。

表 1

$L \backslash c_0$	4(米/秒)	6(米/秒)	8(米/秒)	10(米/秒)
$R = 0.2$	80(公里)	120(公里)	160(公里)	200(公里)
$R = 0.4$	160	240	320	400
$R = 0.6$	240	360	480	600
$R = 0.8$	320	480	640	800
$R = 1.0$	400	600	800	1000

上表中取  $\varphi = 38^\circ$ , 即  $f = 0.88 \times 10^{-4}$ 。

三次代数方程(13)的三个根分别为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_1 &= F - \frac{1}{2}(a + b) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(a - b), \\ \bar{c}_2 &= F - \frac{1}{2}(a + b) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(a - b), \\ \bar{c}_3 &= F + (a + b). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt[3]{R^2F + \sqrt{R^4F^2 - \left(\frac{1+2R^2}{3}\right)^3}}, \\ b &= \sqrt[3]{R^2F - \sqrt{R^4F^2 - \left(\frac{1+2R^2}{3}\right)^3}}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

如果  $F = 0$ , 即沒有平均气流; 那末(14)式变为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_1 &= \sqrt{1 + 2R^2}, \\ \bar{c}_2 &= -\sqrt{1 + 2R^2}, \\ \bar{c}_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

或者回到有因次后为:

$$\bar{c}_{1,2} = \pm \sqrt{g^*H + f^2/k^2}. \quad (17)$$

此即为靜止大气中重力慣性內波的相速度<sup>[2,3]</sup>。

如果取  $R = 0$ , 即不考慮地球的自轉, 則(14)式可以改写为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_1 &= F + 1, \\ \bar{c}_2 &= F - 1, \\ \bar{c}_3 &= F. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

或者有因次的形式为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_1 &= u_g + c_0, \\ \bar{c}_2 &= u_g - c_0, \\ \bar{c}_3 &= u_g. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

此即为一般在盛行气流中重力内波的波速公式.

#### 四、不稳定性的讨论

首先,当考虑了盛行地转气流后,重力惯性内波所具有的一个带有原则意义的性质是:它可以是不稳定的.由公式(14)容易知道,当 $\bar{c}_1$ 和 $\bar{c}_2$ 为共轭复根,它就出现不稳定.其条件是:

$$(R^2 F)^2 - \left( \frac{1 + 2R^2}{3} \right) > 0, \quad (20)$$

或者为

$$F^2 > \frac{1}{R^4} \left( \frac{1 + 2R^2}{3} \right)^3. \quad (21)$$

容易证明,(21)式右端大于或等于一.因此,重力惯性内波出现不稳定的必要条件是:

$$F \geq 1, \text{ 或 } u_g \geq c_0. \quad (22)$$

即:只有当地转风的速度超过作为临界速度的重力内波波速时,才有产生不稳定性的可能.

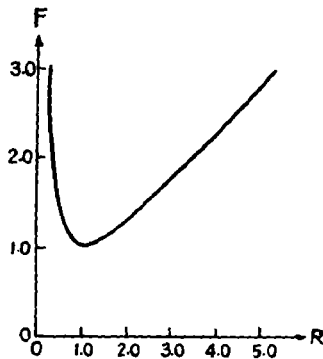


图1 不稳定区

重力惯性内波出现不稳定的临界参数曲线见图1.图1表明:当 $F = 1$ 时,只有 $R = 1$ 或者 $k = f/\sqrt{2}c_0$ 的波有可能不稳定;而当 $F > 1$ 时,在 $k = f/\sqrt{2}c_0$ 附近有一不稳定波数区;而当 $F$ 愈大,这不稳定区就愈宽,亦即能够出现不稳定的波就愈多.如果 $c_0 = 10$ 米/秒, $f = 10^{-4}$ /秒;则 $F = 1.5$ 时,最短的不稳定波长为400公里.

现在,我们来求不稳定波的发展速度,令:

$$\bar{c}_j = \bar{c}_{jr} + i\bar{c}_{ji}, \quad (j = 1, 2). \quad (23)$$

由(14)式求得:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_{1i} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b), \\ \bar{c}_{2i} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(a-b). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

由于 $a \geq b$ ,因此波速为 $\bar{c}_2$ 的这一簇波在不稳定时,它的振幅是随时间而增长的;而 $\bar{c}_1$ 这一簇波则在不稳定参数区中,振幅将逐渐衰减.不稳定波振幅的增长速度见图2.当 $F = 1.5$ 时,最不稳定波的增长速度约为 $c_i = 0.7c_0$ .由于这时最不稳定波所对应的 $R$ 约为1.5,相应的波数约为 $k = f/1.5\sqrt{2}c_0$ ,因此振幅 $A$ 的增加约为 $|A_t/A_0| \approx \exp(kc_i t) = \exp(0.7t/1.5\sqrt{2})$ .所以当取 $f = 10^{-4}$ /秒时,约经过19个小时,就能够使小扰动的振幅增大10倍.

这种超临界流的不稳定性,最早海洋学家 Stommel<sup>[4]</sup> 在研究湾流的弯曲时,曾简单地提到过。在气象学中,这种不稳定性就作者所知,还尚未被人们所注意。由于这种不稳定性所要求的条件、扰动的空间尺度和增长速度都是在大气中能够实现的。因此,作者认为:这种由平均位能供给能量的重力慣性內波的不稳定性,可能与大气中某些中尺度扰动的发展有关。这是值得在今后的实际工作中加以注意的。

### 五、相速度的討論

由三次代数方程根的判別式知道,当条件(20)不滿足时,方程具有三个不同的实根;并且当  $F^2R^4 = \left(\frac{1+2R^2}{3}\right)^3$  时,三个实根中有两个为重根。在这种情况下,改用下面关于根的三角函数表达式,这样討論起来会更方便些。表达式为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_1 &= F + 2A \cos \frac{\varphi}{3}, \\ \bar{c}_2 &= F - 2A \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right), \\ \bar{c}_3 &= F - 2A \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中:

$$A = \left(\frac{1+2R^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi = \cos^{-1}B, \quad B = FR^2 / \left(\frac{1+2R^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

当条件(20)成立时,(14)式中的虚部为增长率,实部为相速度。即为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_{1r} &= F - \frac{1}{2}(a+b), \\ \bar{c}_{2r} &= F - \frac{1}{2}(a+b), \\ \bar{c}_{3r} &= F + (a+b). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

亦即  $\bar{c}_{1r}$  和  $\bar{c}_{2r}$  为重根。

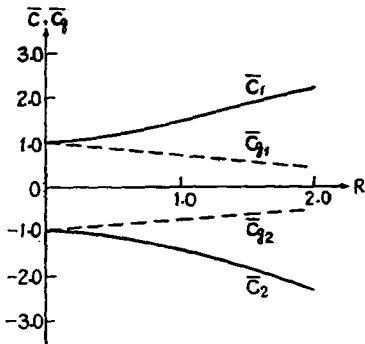


图3  $F=0$  时的相速、羣速

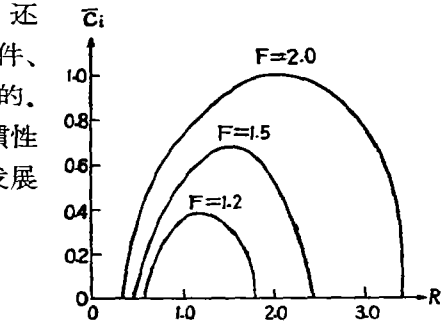


图2 增长率

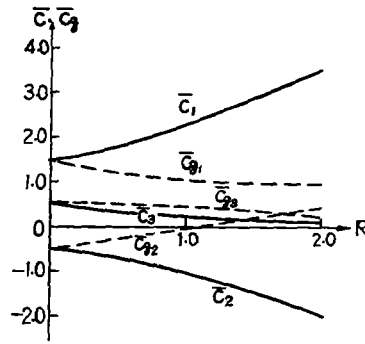


图4  $F=0.5$  时的相速、羣速

当重力惯性内波不出现不稳定时,相速度的性质比较简单。由(25)式,当  $R \rightarrow 0$  时,便得到(18)式。当  $R \rightarrow \infty$  时,容易看出  $\bar{c}_1 \rightarrow \infty, \bar{c}_2 \rightarrow -\infty, \bar{c}_3 \rightarrow 0$ 。当  $F = 0, F = 0.5$  时,相速度随  $R$  的变化分别见图 3 和图 4 的实线。

当重力惯性内波出现不稳定时,相速度性质比较复杂。这时由稳定区趋向不稳定区的边界时即当  $R \rightarrow R^*$  ( $R^*$  为不稳定区域左边界线,下标“—”表示左极限),由于

$$B = \frac{FR^2}{\left(\frac{1+2R^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} = 1, A = \left(\frac{1+2R^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{FR^2},$$

$$\varphi = 0^\circ,$$

所以由(25)式得到由稳定区趋向不稳定区左边界的相速度为:

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } R \rightarrow R_{-}^*, \quad \bar{c}_{1r} &= F + 2\sqrt[3]{FR^2}, \\ \bar{c}_{2r} &= F - \sqrt[3]{FR^2}, \\ \bar{c}_{3r} &= F - \sqrt[3]{FR^2}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

即这时的  $\bar{c}_2, \bar{c}_3$  变为一对重根。另一方面,在不稳定区中,当  $R \rightarrow R_+^*$  时,由于  $a = b = \sqrt[3]{R^2F}$ ,故由(26)式得到:

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } R \rightarrow R_+^*, \quad \bar{c}_{1r} &= F - \sqrt[3]{FR^2}, \\ \bar{c}_{2r} &= F - \sqrt[3]{FR^2}, \\ \bar{c}_{3r} &= F + 2\sqrt[3]{FR^2}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

比较(27),(28)两式后,可以看出:通过不稳定区的左边界时,  $\bar{c}_1$  和  $\bar{c}_3$  两个根互相置换。

同样地分析表明:当通过不稳定区的右边界时,  $\bar{c}_1$  和  $\bar{c}_3$  又再一次互相置换。

当  $F = 1.5$  时,相速度随  $R$  的改变见图 5 中的实线。根据计算结果,我们很容易看出:当考虑了盛行地转风后,重力惯性内波有三个相速度。参考了(18)式后,容易知道:  $\bar{c}_1$  和  $\bar{c}_2$  分别是两组快波,其中  $\bar{c}_1$  是相对气流的前进波,  $\bar{c}_2$  是后退波;而  $\bar{c}_3$  是一组慢波,当不考虑地球自转的影响时,慢波的相速就是风速。

考虑了盛行气流之后,正如图 5 所示,相速度具有一个很有意思的特性是:当通过不稳定区的边界时,它的变化是不连续的。如  $\bar{c}_3$  当波长大到使波变为不稳定时,相速度将突然变大;

以后当波长再一次增大到进入稳定区时,相速度又突然变小。同样地,  $\bar{c}_1$  在不稳定区交界处也有类似的情况。

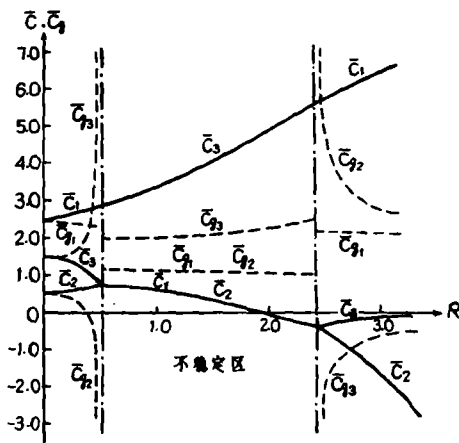


图 5  $F = 1.5$  时的相速、羣速

### 六、羣速度的讨论

由于重力慢性内波是一种频散波,因此羣速度不等于相速度。在无因次形式下的羣速度公式为:

$$\bar{c}_g = \bar{c} - R \frac{\partial \bar{c}}{\partial R}. \quad (29)$$

在穩度區域中的羣速度，可將(25)式代入(29)式則得到：

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_{g1} &= DF + \bar{c}_1(1-D) - E \sin \frac{\varphi}{3}, \\ \bar{c}_{g2} &= DF + \bar{c}_2(1-D) - E \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3} \right), \\ \bar{c}_{g3} &= DF + \bar{c}_3(1-D) + E \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式中：

$$D = \frac{2R^2}{3A^2}, \quad E = \frac{4R^2F(1-R^2)}{9A^2\sqrt{1-B^2}}.$$

在不穩定區域中的羣速度，可由(26)式代入(29)式后得到：

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_{g1} &= \bar{c}_1 + \frac{1}{2} G(d+e), \\ \bar{c}_{g2} &= \bar{c}_2 + \frac{1}{2} G(d+e), \\ \bar{c}_{g3} &= \bar{c}_3 - G(d+e). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式中：

$$G = \frac{2}{3} R^2, \quad d = \frac{1}{a^2} \left[ F + \frac{F^2 R^2 - \left( \frac{1+2R^2}{3} \right)^2}{\sqrt{F^2 R^4 - \left( \frac{1+2R^2}{3} \right)^3}} \right],$$

$$e = \frac{1}{b^2} \left[ F - \frac{F^2 R^2 - \left( \frac{1+2R^2}{3} \right)^2}{\sqrt{F^2 R^4 - \left( \frac{1+2R^2}{3} \right)^3}} \right].$$

由(30)式可知，當  $R \rightarrow 0$ ，由於  $A \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $D = B = E \rightarrow 0$ 。因此容易得到：

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_{g1} &= \bar{c}_1 = F + 1, \\ \text{當 } R \rightarrow 0, \bar{c}_{g2} &= \bar{c}_2 = F - 1, \\ \bar{c}_{g3} &= \bar{c}_3 = F. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

當  $R \rightarrow \infty$  時，由於  $D \rightarrow 1$ ， $B \rightarrow 0$ ， $E \rightarrow -F$ ， $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ， $A \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}R$ ，而  $\bar{c}_1 \rightarrow +\infty$ ， $\bar{c}_2 \rightarrow -\infty$ ， $\bar{c}_3 \rightarrow 0$ ；因此求得  $\bar{c}_{g1} \rightarrow \frac{3}{2}F$ ， $\bar{c}_{g2} \rightarrow \frac{3}{2}F$ ， $\bar{c}_{g3} \rightarrow 0$ 。此外，如不穩定區的左邊界和右邊界的值分別為  $R^*$  和  $R^{**}$ ，則由於  $R \rightarrow R^*$  或  $R \rightarrow R^{**}$  時， $B \rightarrow 1$ ， $\varphi \rightarrow 0$ ，而  $E \rightarrow \infty$  或  $-\infty$ ，因此得到當  $R \rightarrow R^*$  時， $\bar{c}_{g2} \rightarrow -\infty$ ， $\bar{c}_{g3} \rightarrow -\infty$ ；當  $R \rightarrow R^{**}$  時， $\bar{c}_{g2} \rightarrow +\infty$ ， $\bar{c}_{g3} \rightarrow -\infty$ ，而  $\bar{c}_{g1}$  則可以證明為有限。在不穩定區域中，(31)式表明： $\bar{c}_{g1} = \bar{c}_{g2}$ ，而且  $\bar{c}_{g3}$  在不穩定區域的邊界上取有限值。但與相速度所不同的是：通過不穩定區的邊界時，兩邊的  $\bar{c}_{g1}$  和  $\bar{c}_{g2}$  值出現跳躍。羣速度的計算結果，分別見圖 3—5

中的虚线。

根据计算,首先我们注意到在考虑了盛行地转风后,在不稳定区域中对于相速为  $\bar{c}_1$  和  $\bar{c}_2$  的快波,它的群速度也可以大于相速度。这表明,对于中尺度系统也可以象大尺度系统那样有“上游效应”<sup>[5]</sup>;即当一个中尺度系统(雷暴系统,大风区)在发展时,在它的下游可以激起新的系统产生。

重力惯性内波的群速度可以大于相速度,这一结果带有原则意义。这表明了当中尺度系统在发展时,在它的前方可能不断地有新的系统产生,这是和一些观测结果相符合的,如所谓“共鸣型雷暴”可能就是由于这种机制所产生的。

## 七、结 论

本文讨论了地转气流中的重力惯性内波的性质,得到下面两点主要结果:

1) 当地转风速大于重力内波波速时,某些尺度的重力惯性内波可以产生不稳定性,这种不稳定性可以用来解释某些中系统的发展。

2) 某些波长的重力惯性内波,它的群速度可以大于相速度。这表明了一些发展的中尺度系统的能量可以很快地被传到下游,而在下游产生新的系统。

## 参 考 文 献

- [1] Tepper, M., *J. Met.*, **12** (1955), 287—297.
- [2] Hinkelmann, K., *Tellus*, **3** (1951), 285—296.
- [3] Rossby, C. G., *J. Met.*, **2** (1945), 187—204.
- [4] Stommel, H., *J. Mar. Res.*, **12** (1953), 184—195.
- [5] 叶笃正, *J. Met.*, **6** (1949), 1—16.

## SOME ASPECTS ON THE GRAVITATIONAL WAVES IN A GEOSTROPHIC CURRENTS

CHAO JIH-PING

(*Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica*)

WU QING-YU

(*The Chinese University of Science and Technology*)

### ABSTRACT

In this paper, the instability, phase velocity and group velocity of the gravitational waves in a geostrophic currents are analysed by using a two layer model. The conclusions reached are that: 1. When the Froude number is greater than unit, the gravitational waves of some wave lengths will become unstable. This instability may be used to explain the development of some meso-scale systems. 2. The group velocity of the gravitational waves can exceed its phase velocity. Therefore, when a meso-scale system is developed in some regions, its energy can travel faster downwind than the phase velocity, therefore a new wave may be formed in the front of the old one.