

一个考虑边界条件, 具有准能量守恒 性质的四阶差分格式*

廖洞贤 王超 张光智

(中央气象局气象科学研究所天气气候研究所)

四阶差分格式的优点, 很多人都作过论证或试验^[1,2], 结果表明, 它不论对提高预报质量或节省工作量和单元(对二阶差分格式缩短步长达到类似精度来说)都较明显。但这些结果都是在不考虑水平侧边界条件或在周期条件下得到的, 如何选取较切合实际的边界条件, 使之用到预报方程时计算稳定并保持其重要性质, 看来仍然是需要的。

考虑能量守恒对抑制非线性不稳定有重要作用, 下面将利用作者之一在 1977 年讨论过的在半球范围内直角坐标和球面坐标的水平侧边界条件^[3], 对相应的差分格式的准能量守恒性进行论证。

还对半球和全球范围的球面坐标差分格式作了研究。因北极和南极是方程的奇异点; 很多人在划分网格时都想法使其不在格点上。也有人在该处采用局地直角坐标, 但这样处理后大气总质量和总能量的守恒性则没有证明。对这些问题, 下面也作了讨论。

一、直角坐标的情形

1. 网格、计算范围和垂直分层

计算范围为北半球, 坐标原点在北极。取 0° 、 180° E 经线为 x -轴; 90° E、 90° W 经线为 y -轴。 $x=id$, $i=0, \pm 1, \dots, \pm I$; $y=jd$, $j=0, \pm 1, \dots, \pm J$; 边界取在 $i=\pm I \pm \frac{1}{2}$ 和 $j=J \pm \frac{1}{2}$ 的直线上。

在垂直方向, 采用 $\sigma(=p/p_s)$ 坐标, 把大气分为 $2N$ 层, $\sigma=k\Delta\sigma$, $k=0, 1, \dots, 2N$ 。

2. 预报方程的差分形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p_s u}{m^2} = -D_3 u + \hat{f}v - p_s Z_x + \frac{p_s}{m^2} F_x \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p_s v}{m^2} = -D_3 v - \hat{f}u - p_s Z_y + \frac{p_s}{m^2} F_y \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{p_s T}{m^2} = & -D_3 \left(T' + \frac{gZ}{c_p} \right) + \frac{u p_s}{c_p} Z_x + \frac{v p_s}{c_p} Z_y - \\ & - \frac{g}{m^2 c_p} \frac{\partial p_s}{\partial t} \left(\nabla_\sigma \sigma z - \frac{c_p}{g} T_0 \right) + \frac{p_s}{m^2 c_p} \frac{dQ}{dt} \end{aligned} \quad (1.3)$$

* 本文于 1979 年元月 10 日收到, 1979 年 8 月 16 日收到第二次修改稿。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p_s}{m^2} = -2 \sum_{k=1}^{2N-1} D_2(1) \Delta \sigma \quad (k = \text{奇数}) \quad (1.4)$$

$$g(z_{i,j,k-1} - z_{i,j,k+1}) = R \bar{T}^{2\sigma} \ln \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_{k-1}} \quad (1.5)$$

其中 $\hat{f} = \frac{p_s}{m^2} (f - v \nabla_x m + u \nabla_y m)$; $T = T' + T_0$ ($T_0 = \text{常数}$); F_x , F_y 和 $\frac{dQ}{dt}$ 各是沿 x , y 方向的摩擦力和非绝热加热率; 其他都是气象上常用的符号。在方程组 (1.1)–(1.5) 中, 差分算符的定义是: $D_3 A = D_2 A + \nabla_\sigma A \hat{w}$, $D_2 A = D_x A + D_y A$,

$$D_x A = \frac{1}{d} \left[\frac{4}{3} (\tilde{A}_{i+\frac{1}{2},j,k} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \tilde{A}_{i-\frac{1}{2},j,k} \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j,k}) - \frac{1}{6} (\tilde{A}_{i+1,j,k} \tilde{u}_{i+1,j,k} - \tilde{A}_{i-1,j,k} \tilde{u}_{i-1,j,k}) \right],$$

$$\nabla_\sigma A \hat{w} = \frac{1}{2 \Delta \sigma} (\tilde{A}_{i,j,k+1} \hat{w}_{i,j,k+1} - \tilde{A}_{i,j,k-1} \hat{w}_{i,j,k-1}),$$

$$\nabla_x A = \frac{1}{2d} \left[\frac{4}{3} (A_{i+1,j,k} - A_{i-1,j,k}) - \frac{1}{6} (A_{i+2,j,k} - A_{i-2,j,k}) \right],$$

$$\hat{u} = p_s u / m, \quad \hat{v} = p_s v / m, \quad \hat{w} = p_s \dot{\sigma} / m^2,$$

$$(\tilde{\quad})_{i \pm l, j, k} = \frac{1}{2} [(\quad)_{i, j, k} + (\quad)_{i \pm 2l, j, k}], \quad l = \frac{1}{2}, 1,$$

$$(\bar{\quad})^{2\sigma} = \frac{1}{2} [(\quad)_{i, j, k+1} + (\quad)_{i, j, k-1}]$$

类似地还可以得到 $D_y A$, $\nabla_y A$, $(\tilde{\quad})_{i, j \pm l, k}$, $(\bar{\quad})_{i, j, k \pm l}$ 的表达式。 Z_x , Z_y 各是 $\left[g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_\sigma + \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} \right] / m$ 和 $\left[g \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_\sigma + \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} \right] / m$ 的差分表达式, 可以用把 z 插到相邻的等压面上, 求出其高度梯度的方法, 或用其他方法求出。

3. 边界条件

计算用的垂直边界条件和一般用的相同, 即

$$\text{当} \quad \sigma = 1, 0 \text{ 时, } \hat{w} = 0 \quad (1.6)$$

对于微分形式的初始方程来说, 在水平侧边界, 取法向速度为零, 在其他适当条件下, 可以保证问题的适定性^[4]和总能量守恒(指无加热和摩擦来说)。但是, 在差分的情况, 只要不是单向差, 这个条件就不够, 还需要有附加条件。不过, 后者还必需与方程协调起来。现根据作者之一过去的结果^[3], 给定

1) 当 $i = \pm I \pm \frac{1}{2}$ 时,

$$(v, z, T', p_s, m)_{i+l, j, k} = (v, z, T', p_s, m)_{i-l, j, k} \quad (1.7a)$$

$$u_{i+l, j, k} = -u_{i-l, j, k}, \quad l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \quad (1.7b)$$

2) 当 $j = \pm J \pm \frac{1}{2}$ 时

$$(u, z, T', p_s, m)_{i, j+l, k} = (u, z, T', p_s, m)_{i, j-l, k} \quad (1.8a)$$

$$v_{i, j+l, k} = -v_{i, j-l, k} \quad (1.8b)$$

4. 方程的准能量守恒性

根据方程(1.1)–(1.5)和边界条件(1.6)和(1.7 a)–(1.8 b), 可以证明如下几个结果。

结果 1)
$$\sum_{i, j=-I, -J}^{I, J} u_{i, j, k} D_2 u = \frac{1}{2} \sum_{i, j=-I, -J}^{I, J} u_{i, j, k}^2 D_2 (1) \quad (1.9)$$

结果 2)
$$\sum_{i, j=-I, -J}^{I, J} v_{i, j, k} D_2 v = \frac{1}{2} \sum_{i, j=-I, -J}^{I, J} v_{i, j, k}^2 D_2 (1) \quad (1.10)$$

结果 3)
$$\sum_{k=1}^{2N-1} u_{i, j, k} \nabla_{\sigma} u \hat{w} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N-1} u_{i, j, k}^2 \nabla_{\sigma} \hat{w} \quad (1.11)$$

结果 4)
$$\sum_{k=1}^{2N-1} v_{i, j, k} D_{\sigma} v \hat{w} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2N-1} v_{i, j, k}^2 \nabla_{\sigma} \hat{w} \quad (1.12)$$

结果 5)
$$\sum_{i=-I}^I \sum_{j=-J}^J D_2 (1) = 0 \quad (1.13)$$

结果 6)
$$\sum_{i=-I}^I \sum_{j=-J}^J \sum_{k=1}^{2N-1} c_p D_3 \left(T' + \frac{gz}{c_p} \right) = 0 \quad (1.14)$$

从方程(1.4)和结果 5), 立即可得

$$\sum_{i=-I}^I \sum_{j=-J}^J \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_s}{m^2} \right) = 0 \quad (1.15)$$

这表明, 大气总质量随时间是守恒的。

对方程(1.1)、(1.2)分别乘以 $u_{i, j, k}$ 、 $v_{i, j, k}$, 相加, 并在计算域内求和, 在上面几个结果的基础上, 可以得到

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{1}{g} \sum_{i, j, k} \left[p_s (u Z_x + v Z_y) + \frac{p_s}{m^2} (u F_x + v F_y) \right] \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{g} \sum_{i, j, k} \left[p_s (u Z_x + v Z_y) + \frac{p_s}{m^2} \frac{dQ}{dt} \right] \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (P + K) = \frac{1}{g} \sum_{i, j, k} \frac{p_s}{m^2} \left(u F_x + v F_y + \frac{dQ}{dt} \right) \quad (1.18)$$

其中,
$$K = \sum_{i, j, k} \frac{d^2}{g} (u_{i, j, k}^2 + v_{i, j, k}^2) \frac{p_s}{m^2} \Delta \sigma ;$$

$$P = \sum_{i, j} p_s \left(\frac{2}{g} \sum_k c_p T_{i, j, k} \Delta \sigma + z_s \right) \frac{d^2}{m^2}$$

(1.16)–(1.18) 式表明: 差分方程(1.1)–(1.5)按如上方式求和, 在条件(1.6)和

(1.7a)–(1.8b)下, 和其相应的微分方程在全球的积分一样, 如大气为绝热且无摩擦, 或(1.18)式右端为零, 大气总能量守恒, 不过, 这只是在倾向为时间微商的情况; 如用有限差代替, 还不能保证。在这个意义上, 我们不妨称之为“准守恒”。

二、球面坐标的情形

1. 网格和计算范围

以北半球为计算域, 取 $\Delta\lambda = \Delta\varphi$, $\lambda = i\Delta\lambda$, $i = 0, 1, \dots, M-1$; $\varphi = j\Delta\varphi$, $j = 0, 1, \dots, P$ 。

其中 λ 表示经度, φ 表示纬度。赤道取在 $\varphi = \frac{1}{2}\Delta\varphi$, 即 $j = \frac{1}{2}$ 处。这样, 其附近的 f 值须稍加修改。在垂直方向上, 其分层和直角坐标的相同。

2. 预报方程的差分形式

$$\frac{\partial}{\partial t} p_s u = -D_3 u + \hat{f} p_s v - p_s Z_\lambda + p_s F_\lambda \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_s v = -D_3 v - \hat{f} p_s u - p_s Z_\varphi + p_s F_\varphi \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_s T = & -D_3 \left(T' + \frac{gz}{c_p} \right) + \frac{p_s}{c_p} (u Z_\lambda + v Z_\varphi) \\ & - \frac{g}{c_p} \frac{\partial p_s}{\partial t} \left(\nabla_\sigma \sigma z - \frac{c_p}{g} T_0 \right) + \frac{p_s}{c_p} \frac{dQ}{dt} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_s = -2 \sum_{k=1}^{2N-1} D_2(1) \Delta\sigma \quad (2.4)$$

$$g(z_{i,j,k-1} - z_{i,j,k+1}) = R\bar{T}^{2\sigma} \ln \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_{k-1}} \quad (2.5)$$

其中 $\hat{f} = f + \text{tg}\varphi/a$, a 是地球半径; $D_2 A = D_\lambda A + D_\varphi A$; Z_λ, Z_φ 各为 Z 沿 λ 和 φ 方向的分量。而

$$\begin{aligned} D_\lambda A = & \frac{1}{a \cos \varphi_j} \left[\frac{4}{3 \Delta\lambda} (\tilde{A}_{i+\frac{1}{2},j,k} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \tilde{A}_{i-\frac{1}{2},j,k} \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j,k}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{6 \Delta\lambda} (\tilde{A}_{i+1,j,k} \tilde{u}_{i+1,j,k} - \tilde{A}_{i-1,j,k} \tilde{u}_{i-1,j,k}) \right], \\ D_\varphi A = & \frac{1}{a \cos \varphi_j} \left[\frac{1}{\Delta\varphi} (\tilde{A}_{i,j+\frac{1}{2},k} \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2},k} \cos \varphi_{j+\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. - \tilde{A}_{i,j-\frac{1}{2},k} \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2},k} \cos \varphi_{j-\frac{1}{2}}) \right], \\ \nabla_\lambda A = & \frac{1}{a \cos \varphi_j} \left[\frac{4}{3 \Delta\lambda} (\tilde{A}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \tilde{A}_{i-\frac{1}{2},j,k}) - \frac{1}{6 \Delta\lambda} (\tilde{A}_{i+1,j,k} - \tilde{A}_{i-1,j,k}) \right], \\ \nabla_\varphi A = & \frac{1}{a \Delta\varphi} (\tilde{A}_{i,j+\frac{1}{2},k} - \tilde{A}_{i,j-\frac{1}{2},k}), \\ \hat{u} = & p_s u, \quad \hat{v} = p_s v, \quad \hat{w} = p_s \dot{\sigma} \end{aligned}$$

其他算符和直角坐标的相同。

3. 边界条件

在垂直方向上,仍采用条件(1.6)。在等 σ -面上则假定

$$(u, z, T', p_s)|_{\lambda, \varphi, \sigma, t} = (u, z, T', p_s)|_{\lambda, -\varphi + \Delta\varphi, \sigma, t} \quad (2.6a)$$

$$v|_{\lambda, \varphi, \sigma, t} = -v|_{\lambda, -\varphi + \Delta\varphi, \sigma, t} \quad (2.6b)$$

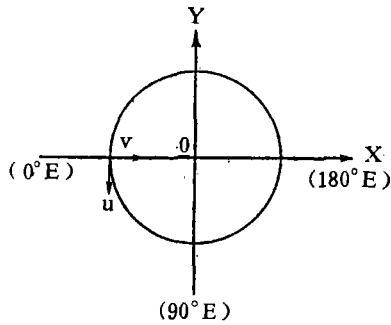


图1 和北极点相切的直角坐标

4. 在极点处的计算

由于在极点的风向无定义,现采用和极点相切的直角坐标图1。如令沿 x 和 y 轴的风的分量各是 U 和 V ,则

$$U = u \sin \lambda + v \cos \lambda \quad (2.7)$$

$$V = -u \cos \lambda + v \sin \lambda \quad (2.8)$$

解之,还有

$$u = U \sin \lambda - V \cos \lambda \quad (2.9)$$

$$v = U \cos \lambda + V \sin \lambda \quad (2.10)$$

于是,方程组(2.1)–(2.5)可以改写为

$$\frac{\partial}{\partial t} p_s U = -\hat{D}_3 U + f p_s V - p_s Z_x + p_s F_x \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_s V = -\hat{D}_3 V - f p_s U - p_s Z_y + p_s F_y \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_s T = & -\hat{D}_3 \left(T' + \frac{gz}{c_p} \right) + \frac{p_s}{c_p} (U Z_x + V Z_y) \\ & - \frac{g}{c_p} \frac{\partial p_s}{\partial t} \left(\nabla_{\sigma} \sigma z - \frac{c_p}{g} T_0 \right) + \frac{p_s}{c_p} \frac{dQ}{dt} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_s = -2 \sum_{k=1}^{2N-1} \hat{D}_2(1) \Delta \sigma \quad (2.14)$$

静力方程和(2.5)一样。在这些方程中, $\hat{D}_3 A = \hat{D}_2 A + \nabla_{\sigma} A \hat{w}$; $\hat{D}_2 A = -\frac{\mu}{4} \sum_{i=0}^{M-1} (A_{p,k} + A_{i,p-1,k})(v_{i,p-1,k} + U_{p,k} \cos \lambda_i + V_{p,k} \sin \lambda_i)$, $\mu = \sin \frac{\Delta\varphi}{2} / aM \left(1 - \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right)$ 。

5. 能量转换和能量守恒

取 $\Delta s_{i,j} = a^2 \cos \varphi_j \cdot \Delta \lambda \Delta \varphi$, $j \neq p$;

$$\Delta s_p = 2 \pi a^2 (1 - \cos \Delta\varphi / 2),$$

可以证明如下结果成立,即

结果 7)
$$\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{P-1} D_2 A \cdot \Delta s_{i,j} + \hat{D}_2 A \cdot \Delta s_p = 0 \quad (2.15)$$

结果 8)
$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^{2N-1} [(u_{i,j,k} D_3 u + v_{i,j,k} D_3 v) \Delta s_{i,j} \\ & = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{1}{2} (u_{i,j,k}^2 + v_{i,j,k}^2) D_3(1) \cdot \Delta s_{i,j} + \frac{a \Delta \lambda}{2} \end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=1}^{2N-1} (u_{i,p-1,k} u_{i,p,k} \tilde{v}_{i,p-\frac{1}{2},k} + v_{i,p-1,k} v_{i,p,k} \tilde{v}_{i,p-\frac{1}{2},k}) \cos \varphi_{p-\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

(其中 $u_{i,p,k} = U_{p,k} \sin \lambda_i - V_{p,k} \cos \lambda_i$, $v_{i,p,k} = U_{p,k} \cos \lambda_i + V_{p,k} \sin \lambda_i$)

结果9)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2N-1} (U_{p,k} \hat{D}_3 U + V_{p,k} \hat{D}_3 V) \Delta s_p \\ &= -\frac{a\Delta\lambda}{2} \sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^{2N-1} (u_{i,p,k} u_{i,p-1,k} + v_{i,p,k} v_{i,p-1,k}) \tilde{v}_{i,p-\frac{1}{2},k} \cos \varphi_{p-\frac{1}{2}} - \\ & \quad - \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{1}{2} (U_{p,k}^2 + V_{p,k}^2) \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} \right)_p \end{aligned} \quad (2.17)$$

在结果7)–9)的基础上，如 $F_\lambda = F_\varphi = F_x = F_y = 0$, $\frac{dQ}{dt} = 0$, 用和前面的方法，可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} &= -\frac{2}{g} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^{2N-1} [p_s(u Z_\lambda + v Z_\varphi)]_{i,j,k} \Delta s_i \Delta \sigma - \\ & \quad - \frac{2}{g} \sum_{k=1}^{2N-1} (p_s)_p (U Z_x + V Z_y)_{p,k} \Delta s_p \Delta \sigma \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{2}{g} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^{2N-1} [p_s(u Z_\lambda + v Z_\varphi)]_{i,j,k} \Delta s_i \Delta \sigma + \\ & \quad + \frac{2}{g} \sum_{k=1}^{2N-1} [(U Z_x + V Z_y) p_s]_{p,k} \Delta s_p \Delta \sigma \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (P + K) = 0 \quad (2.20)$$

其中 $K = \sum_{i,j,k} \left[\frac{p_s}{g} (u^2 + v^2) \right]_{i,j,k} \Delta s_i \Delta \sigma + \sum_k \frac{p_s}{g} (U^2 + V^2)_{p,k} \Delta s_p \Delta \sigma$;

$$P = \sum_{i,j} p_s \left(z_s + \frac{2}{g} \sum_k c_p T_{i,j,k} \Delta \sigma \right) \Delta s_i \Delta \sigma + \left[p_s \left(z_s + \frac{2}{g} \sum_k c_p T_k \Delta \sigma \right) \right]_p \Delta s_p$$

还可以得到

$$\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{P-1} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} \right)_{i,j} \Delta s_i \Delta \sigma + \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} \right)_p \Delta s_p = 0 \quad (2.21)$$

三、全球预报

上面的方法稍加修改，还可以推广到全球。显然，这时不必用条件(2.6 a)和(2.6 b)，也不应加赤道在 $\varphi = \frac{1}{2} \Delta \varphi$ 的限制。但在南极，如仍用直角坐标，且坐标轴仍和图1中的一样(图2)，则有

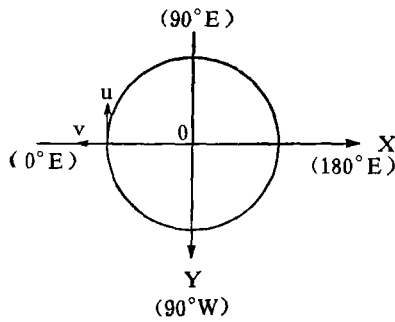


图 2 和南极点相切的直角坐标

$$U = u \sin \lambda - v \cos \lambda \quad (3.1)$$

$$V = -u \cos \lambda - v \sin \lambda \quad (3.2)$$

或

$$u = U \sin \lambda - V \cos \lambda \quad (3.3)$$

$$v = -U \cos \lambda - V \sin \lambda \quad (3.4)$$

而且

$$\hat{D}_2 A = \frac{\mu}{4} \sum_{i=0}^{M-1} (A_{-p,k} + A_{i,-p+1,k})$$

$$(v_{i,-p+1,k} - U_{-p,k} \cos \lambda_i - V_{-p,k} \sin \lambda_i)。$$

其他仍和在半球的情形一样。

容易看出，在全球的情况下，其总质量和总能量的准守恒性，以及总动能和总位能的转换关系仍和半球的情形一样。

前面我们给出的球面坐标的差分格式，在经圈方向和纬圈方向的精度是不同的。容易看出，如这两个方向都用二阶差分，仍可以证明，大气总能量和总质量是准守恒的。不过，如在两个方向都用四阶差分，则因在 $j=P-1$ 的纬圈上，计算 (λ_i, φ_j) 处的散度须用到点 $(\lambda_i + \pi, \varphi_j)$ 的值，这时，在经圈上 v 的方向会有两个相反的定义，必须加以处理。这样，问题就复杂了。这个问题仍有待于今后进行研究。

参 考 文 献

- [1] Kreiss, H., Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations, *Tellus*, 24 (1972), №. 3, 199—215.
- [2] Kalang-Rivas, E., A. Baylis, and J. Storch, Experiments with the 4th order Giss general circulation model, Simulation of large-scale atmospheric processes, *Annalen der Meteorologie (Neue Folge)* Nr. 11, 25—27, 1976.
- [3] 廖洞贤, 论半球预报的水平侧边界条件, 第二次全国数值预报会议文集(即将出版), 科学出版社, 1977.
- [4] 曹庆存, 数值天气预报的数学物理基础(即将出版), 科学出版社, 1978.