

正压原始方程变分初值试验*

王晓林 吴辉碇 王宝根

(北京大学地球物理系)

(国家海洋局海洋预报总台)

提 要

本文利用地转风关系及运动方程作为动力约束条件,对初始风场及高度场进行了调整。在调整场与实测场均方差最小,总平均动能损失也最小的条件下选择了权重因子。还成功地进行了局部风场“嵌入”即所谓“窗户”区试验。对于变分约束对扰动的影响作了初步的探讨。最后还做了 24 小时预报并与地转初值预报进行了比较。

一、引 言

海洋上定时常规观测资料稀少,这对客观分析及数值预报带来很大的困难。卫星云图的观测提供了某些高度风的资料。但由于它是非定时的并且只在有云区才有记录,广大的副热带洋面仍然缺少资料。如何将定时和非定时的、东一块、西一点的风与气压记录都能为预报所用,这是一个极需解决的问题。本文利用变分约束来探讨如何同时使用风场和气压场记录,特别是嵌入一小块风场记录时保证动力学上的一致性。

另外,数值预报中常用的静力初值方法是存在很大问题的,特别是在风场有切变的情况下,风场和气压场存在很大的交角。例如,对盛夏风压关系初步分析^[1]后,发现利用平衡关系由高度场计算风场,精度损失竟达 5—8 米/秒。而开始十二小时预报精度损失也不过是 1—1.2 米/秒。说明由于客观分析和初值处理所引起的误差甚至比预报累积误差还大。上述结果清楚地表明,合理地利用现有的各种形式的大量资料和处理好初值,对提高预报精度具有很大的作用。

本文介绍我们利用变分方法进行初值调整试验所得的一些初步结果。采用正压原始方程模式进行分析和预报试验,将模式的水平动量方程作为动力约束条件,并与用地转关系的约束所得的结果进行比较。试验中将分析、预报的重点区域开一个“窗户”,在“窗户”内的格点输入实测风资料,其它区域为地转风,进行位势场和风场调整试验,试图一方面提高重点区域的预报精度,另一方面为以后进一步进行四维分析试验指出途径。

二、变分调整初值方法

佐佐木将变分法(1958, 1969)^[3,4]引用到气象要素场的客观分析和初值处理中,根据这些气象要素所服从的一些物理关系,给定附加条件,得到最佳的分析场,可以用

* 本文于 1979 年 7 月 23 日收到, 1979 年 11 月 22 日收到修改稿。

断方程或预报方程作为附加的约束条件。

我们首先对一个等压面分别用地转关系和水平运动方程作为约束条件, 进行风压关系相互调整的试验。

1. 要求所得分析值之间满足准地转关系

如考虑实测气象要素分别是 \tilde{u} , \tilde{v} , $\tilde{\phi}$, 而相应的分析值分别是 u , v , ϕ , 其中 u , v 分别是风速的两个水平分量; ϕ 是位势高度, 要求所得分析值或者说调整后的初值之间近似满足地转关系, 即

$$fv - \phi_x = 0 \quad (1)$$

$$fu + \phi_y = 0 \quad (2)$$

式中 f 为科氏参数; ϕ_x 及 ϕ_y 分别表示 ϕ 对 x 和 y 的偏导数。

根据解变分问题的经典间接方法, 假定边界上变分为零, 函数 u , v , ϕ 使泛函

$$\begin{aligned} I &= \iint_s [\alpha(u - \tilde{u})^2 + \alpha(v - \tilde{v})^2 + \beta(\phi - \tilde{\phi})^2] ds \\ &= \iint_s F(x, y, u, v, \phi) ds \end{aligned} \quad (3)$$

在约束条件 (1)、(2) 下实现极值时, 则对于适当选择的权重因子 λ , 即所谓拉格朗日乘子, u , v , ϕ 必须满足由泛函

$$\begin{aligned} I^* &= \iint_s [F + \lambda(fv - \phi_x)^2 + \lambda(fu + \phi_y)^2] ds \\ &= \iint_s F^*(x, y, u, v, \phi, \phi_x, \phi_y) ds \end{aligned} \quad (4)$$

所得的欧拉方程为

$$F_u^* = 0 \quad (5)$$

$$F_v^* = 0 \quad (6)$$

$$F_\phi^* - \frac{\partial}{\partial x} \{F_{\phi_x}^*\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_{\phi_y}^*\} = 0 \quad (7)$$

上述积分区域 s 表示等压面上分析区域。 $\frac{\partial}{\partial x} \{ \}$, $\frac{\partial}{\partial y} \{ \}$ 分别表示对 x , y 的全偏导数。乘子 λ 和权重 α , β 一样是事先给定的, 而不是待定的。 λ 对 α , β 的相对大小和我们在调整时对约束条件重视程度有关, 此即所谓弱约束条件。(4) 式中的 F^* 即

$$F^* = \alpha(u - \tilde{u})^2 + \alpha(v - \tilde{v})^2 + \beta(\phi - \tilde{\phi})^2 + \lambda(fv - \phi_x)^2 + \lambda(fu + \phi_y)^2 \quad (8)$$

所得欧拉方程为

$$\alpha(u - \tilde{u}) + \lambda f(fu + \phi_y) = 0 \quad (9)$$

$$\alpha(v - \tilde{v}) + \lambda f(fv - \phi_x) = 0 \quad (10)$$

$$(\lambda \phi_x)_x + (\lambda \phi_y)_y - \beta \phi = (\lambda f v)_x - (\lambda f u)_y - \beta \tilde{\phi} \quad (11)$$

上述方程组可以化为

$$u = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda f^2} \tilde{u} - \frac{\lambda f}{\alpha + \lambda f^2} \phi_y \quad (12)$$

$$v = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda f^2} \bar{v} + \frac{\lambda f}{\alpha + \lambda f^2} \phi_x \quad (13)$$

$$[(r\phi_x)_x + (r\phi_y)_y] - \beta\phi = (fr\bar{v})_x - (fr\bar{u})_y - \beta\bar{\phi} \quad (14)$$

$$\text{式中 } r = \frac{\alpha\lambda}{\alpha + \lambda f^2} = \frac{\lambda}{1 + \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)f^2}$$

(12)–(14) 即是分析方程组。假如忽略 r 、 f 的微商, (14) 式可以简化为

$$r\nabla^2\phi - \beta\phi = rf\bar{\zeta} - \beta\bar{\phi} \quad (15)$$

式中 $\bar{\zeta} = \bar{v}_x - \bar{u}_y$, 表示实测风涡度。(15) 式右边第一部分表示实测风涡度对分析场所起的作用, 第二部分表示实测位势所起的作用。

(15) 式是一个典型的赫姆霍茨方程, 事先选取合适的权重因子, 采用超松弛迭代法, 求出 ϕ , 再代入 (12), (13), 就可以得到所需要的 u , v 。由此得到的 u , v , ϕ 的分析场, 它们分别与相应的实测值从最小二乘意义来说是偏差最小的。而且 u , v , ϕ 的分析值又近似满足地转关系。

2. 要求分析值适应预报方程

在进行正压原始方程模式预报试验中, 初值采用该模式水平运动方程作为动力约束条件, 用

$$u_t = 0 \quad (16)$$

$$v_t = 0 \quad (17)$$

代替 (1)、(2)。我们也采用 Lewis 和 Grayson(1972)^[2] 方法, 用已知的实测风计算平流项 $\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla u$, $\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla v$ 代替未知的非线性平流项 $\mathbf{v} \cdot \nabla u$, $\mathbf{v} \cdot \nabla v$ 。大大减少了处理上的困难。

因此代替 (10) 式为

$$F^*(x, y, u, v, \phi, \phi_x, \phi_y) = \alpha(u - \bar{u})^2 + \alpha(v - \bar{v})^2 + \beta(\phi - \bar{\phi})^2 + \lambda(u_t^2 + v_t^2) = \alpha(u - \bar{u})^2 + \alpha(v - \bar{v})^2 + \beta(\phi - \bar{\phi})^2 + \lambda(fv - \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{u} - \phi_x)^2 + \lambda(fu + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{v} + \phi_y)^2 \quad (18)$$

式中 $\bar{\mathbf{v}} = \bar{u}\mathbf{i} + \bar{v}\mathbf{j}$ 表示实测风矢量。因此, 由 (18) 式构成的泛函, 其形式与 (4) 式一样, 所以其欧拉方程也可以表示为 (5)–(7)。将 (18) 式代入这三个方程, 得分析方程组为:

$$u = \frac{1}{\alpha + \lambda f^2} (\alpha \bar{u} - \lambda f \phi_y - \lambda f \bar{B}) \quad (19)$$

$$v = \frac{1}{\alpha + \lambda f^2} (\alpha \bar{v} + \lambda f \phi_x + \lambda f \bar{A}) \quad (20)$$

$$\nabla \cdot (r \nabla \phi) - \beta \phi = \mathbf{K} \cdot \nabla \times (r f \bar{\mathbf{v}}) - \beta \bar{\phi} - \nabla \cdot (r \bar{\mathbf{C}}) \quad (21)$$

式中 $\bar{A} = \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{u}$, $\bar{B} = \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{v}$, $\bar{\mathbf{C}} = \bar{A}\mathbf{i} + \bar{B}\mathbf{j}$

(21) 式右边前两项和 (15) 式一样, 第三项表示水平平流辐合对分析起的作用。

和上述一样, 由 (21) 式求出 ϕ 后, 再代入 (19), (20) 得到 u , v 的分析值。由此所得的 u , v , ϕ 分析值不仅分别最接近实测值, 而且相互之间满足运动方程的约束条件。其特点是约束条件与预报方程一致, 使得调整后的初值更适应预报方程。

三、试验结果与讨论

1. 变分初值

我们在欧亚区域采用格距为 200 公里的网格, 进行 500 mb 初值调整试验, 分别采用正压原始方程预报模式中的运动方程和地转关系作为约束条件, 经过多次试验比较, 前者选择权重为

$$\begin{aligned}\alpha &= 75 \text{ 米}^{-2} \text{ 秒}^2 \\ \beta &= 0.72 \text{ 米}^{-4} \text{ 秒}^4 \\ \lambda &= 4 \times 10^6 \text{ 米}^{-2} \text{ 秒}^4\end{aligned}$$

输入实测风场和位势场, 由 (19)–(21) 得到调整后的风场和位势场。这样所得的风场比地转风场更加接近实测风场。例如, 选取 1977 年 7 月 18 日 08 时 500 mb 调整后的风场与实测风之差和地转风与实测风之差比较, 可以看到前者比后者小。对于该例, 分析区域的地转风和实测风的均方差为

$$\sigma_u = 0.3 \text{ 米/秒}, \sigma_v = 0.2 \text{ 米/秒}$$

而且调整后的风场又与调整后的位势场之间, 比原始场之间更好地满足一定的约束关系。它们相互间受约束的程度与预先给定的权重 λ , 对 α, β 的相对大小有关。

对于同一例, 采用地转约束关系, 使用同样权重, 经过变分调整后所得风场和位势场的均方差二者相差甚小。因此, 两种约束条件所得初值很近似。

另外, 我们只在部分分析区域, 即所谓“窗户”区域输入实测风资料, 其它区域仍使用地转风 (图 1) 进行调整试验。发现这样可以提高“窗户”区域风场分析精度。在“窗户”区实测风与地转风的 u, v 分量的均方差分别为

$$\sigma_u = 3.16 \text{ 米/秒}, \sigma_v = 3.74 \text{ 米/秒}$$

但经过变分约束后却变成

$$\sigma_u = 0.021 \text{ 米/秒}, \sigma_v = 0.026 \text{ 米/秒}$$

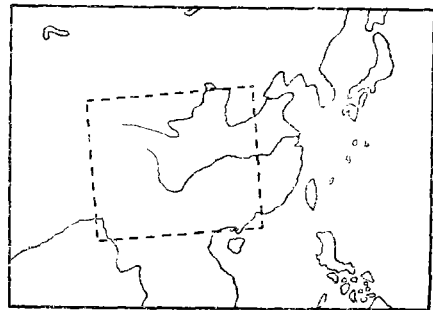


图 1 输入实测风区域(虚线方框)示意图

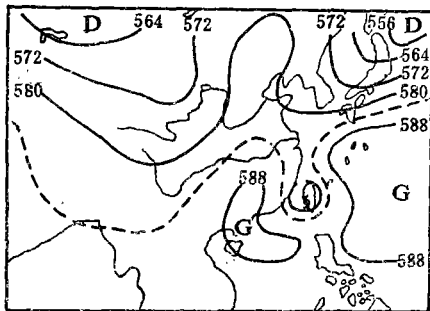


图 2 1976 年 7 月 18 日 08 时 (北京时间, 以下同) 500 mb 实况

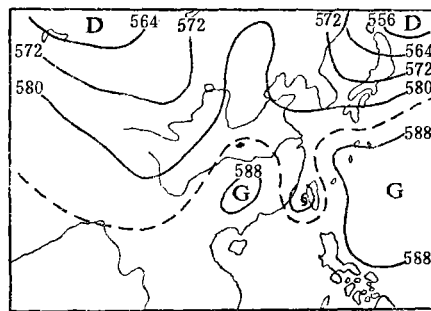


图 3 1976 年 7 月 18 日 08 时 500 mb 变分调整后的初值

二者相比,显然后者使分析精度大大提高,实况及变分约束后的初值图分别如图 2 及图 3。

2. 时间积分过程中动能的变化

以 1977 年 7 月 18 日 08 时(北京时,以下同)500 mb 图为例。首先,我们将高度场和风场同时输入模式,全场平均动能用公式: $\bar{E} = \left[\sum_{i=1}^{22} \sum_{j=1}^{31} \frac{1}{2} (u_{ij}^2 + v_{ij}^2) \right] / (31 \times 22)$ 表

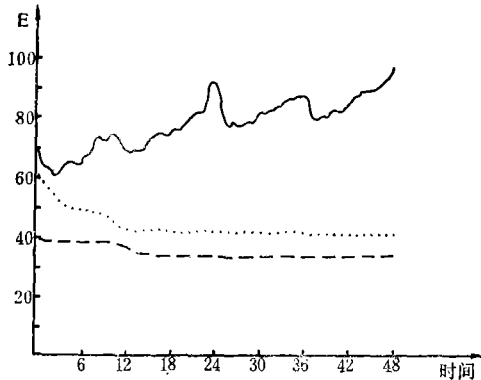


图 4 全场平均动能随时间变化(1977 年 7 月 18 日 08 时 500 mb) (单位,米²/秒²) (实线表示同时输入风场和高度场的结果;点线表示变分调整结果($\sigma_u=0.05, \sigma_v=0.04, \sigma_z=0.26$);虚线表示地转初值结果)

示。图 4 中实线就表示这种情况下 \bar{E} 随时间 t 的变化。可以看出,动能随时间 t 不断振动上升,很快天气图就面目全非而失去任何意义。其次,我们用原始方程对风场和高度场进行变分约束。适当选择权重因子 α, β 和 λ , 可以使风场和高度场的实测值与分析值之间的均方差很小,即二者形势场基本相似,但是后者动能变化的性质完全改变了。图 4 中点线表示这种情况。变分调整后的初值开始时能量下降了约 9%,以后缓慢下降,12 小时后就基本上处于定常的稳定状态。最后,虚线表示常用的地转初值情况,可以明显地看到,地转风场的能量比实测初始场能量大大削减达 45%。

3. 变分约束的滤波作用及权重的选择

变分前重力位势谐波解的形式为

$$\tilde{\phi} = \tilde{A} e^{i\mu(x-ct)} \quad (22)$$

速度谐波解的形式为

$$\tilde{v} = \tilde{B} e^{i\mu(x-ct)} \quad (23)$$

变分后解的形式分别为

$$\left. \begin{aligned} \phi &= A e^{i\mu(x-ct)} \\ v &= B e^{i\mu(x-ct)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

地转约束的欧拉方程 (15) 变成一维形式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\beta}{r} \phi = f \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\beta}{r} \tilde{\phi} \quad (25)$$

将 (22)–(24) 代入上式得

$$A = \frac{1}{\mu^2 + \frac{\beta}{r}} \left(\frac{\beta}{r} \tilde{A} - i f \mu \tilde{B} \right) \quad (26)$$

上式写成指数形式为

$$A = D e^{i\theta} \quad (27)$$

式中 θ 为位相, 振幅

$$D = \frac{1}{\left(\mu^2 + \frac{\beta}{r} \right)} \left(\frac{\beta^2}{r^2} \tilde{A}^2 + f^2 \mu^2 \tilde{B}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

变分约束对于不同波长扰动的影响可用振幅比 $R = \frac{D}{\bar{A}}$ 表示, 即变分约束后的扰动振幅与变分约束前的扰动振幅之比。

波长与振幅比的关系

取 $\beta = 0.72 \text{ 米}^{-4} \text{ 秒}^4$, $\lambda = 4 \times 10^6 \text{ 米}^{-2} \text{ 秒}^2$, $\alpha = 75 \text{ 米}^{-2} \text{ 秒}^2$, $\bar{A} = 200 \text{ 米}^2 \text{ 秒}^{-2}$, $\bar{B} = 10 \text{ 米} \text{ 秒}^{-1}$, R 与波数 μ 的关系如图 5 实线所示。由图 5 可清楚地看到, 对几十公里以下的短波, 这样的变分约束起着强烈的滤波作用。这也许就是为什么通过变分约束可以同时输入风场和高度场, 甚至可以嵌入一块风场而使计算不致产生紊乱的原因。

进一步分析可看出, 在 (25) 中右端第一项是小项, 在讨论振幅比时可以略去。则 (28) 变成

$$D = \frac{\beta/r}{\mu^2 + \beta/r} \bar{A}$$

由上式看出, 通过变分约束波数, 对扰动振幅起了作用。变分约束对于波长长 (μ 小) 的扰动不起作用, 振幅与原先近于相等。但对波长短 (μ 大) 的扰动则起了很大的作用, 造成振幅强烈的削减。

如选择不同的权重因子, 则滤波作用就很不一样。先考虑动力学权重因子 λ 变化的影响, 取三组参数

$$\beta = 0.72 \text{ 米}^{-4} \text{ 秒}^4, \alpha = 75 \text{ 米}^{-2} \text{ 秒}^2, \lambda = \begin{cases} 10^4 \\ 4 \times 10^4 \text{ 米}^{-2} \text{ 秒}^2 \\ 10^8 \end{cases}$$

图 5 中三条曲线表示这三种情况, λ 太大(点线)、波长较长的波, 如几百公里波长的波都被削弱或滤去; λ 太小(虚线), 则几公里的波都不会削弱。为了达到既能滤去不需要的短波, 又能保证有天气意义的波不致被削弱, 则选择图中实线的 λ 值是较为合适的。

再考虑高度场权重 β 对滤波的影响, 取三组参数

$$\alpha = 75 \text{ 米}^{-2} \text{ 秒}^2, \lambda = 4 \times 10^6 \text{ 米}^{-2} \text{ 秒}^2, \beta = \begin{cases} 10^{-2} \\ 0.72 \text{ 米}^{-4} \text{ 秒}^4 \\ 10^2 \end{cases}$$

所得曲线与图 5 λ 一组三条曲线完全重复, 同 λ 分析, 取实线一组参数是较合适的。

计算表明, 风场权重 α 的变化对滤波的影响是小的。

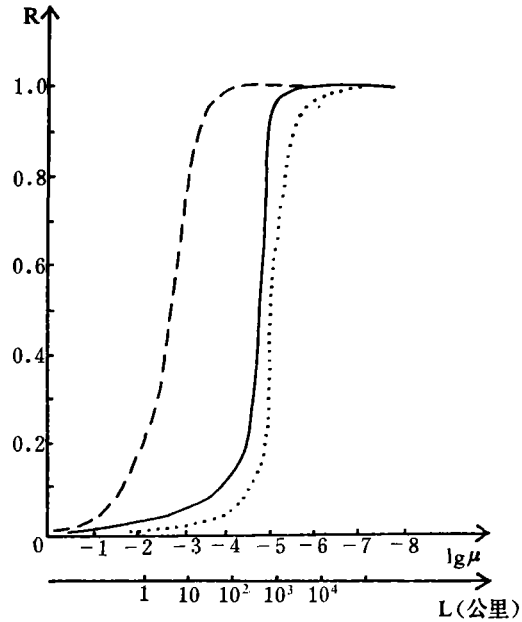


图 5 波数和振幅比的关系

四、预报个例分析

这里,任意选取 1978 年 4 月 3 日 08 时 500 mb 的分析和预报为例。采用原始方程作为动力约束,在所关心的地区,开一个“窗户”,嵌入实测风场,并与只输入高度场而求出地转风作为初值的常规方法的预报进行了比较。正压原始方程组采用半动量格式,时间积分采用欧拉向后及中央差交替使用。

图 6 给出了 29 日 08 时 500 毫巴实况图。原在里海的闭合低压东移至咸海,闭合涡旋消失,槽前高脊东移至巴尔喀什湖上空,脊前西北气流引导主体位于乌拉尔山的冷空气向东南侵入我国,24 小时低槽东移 10 个经度,到达贝加尔湖地区。与此同时,位于

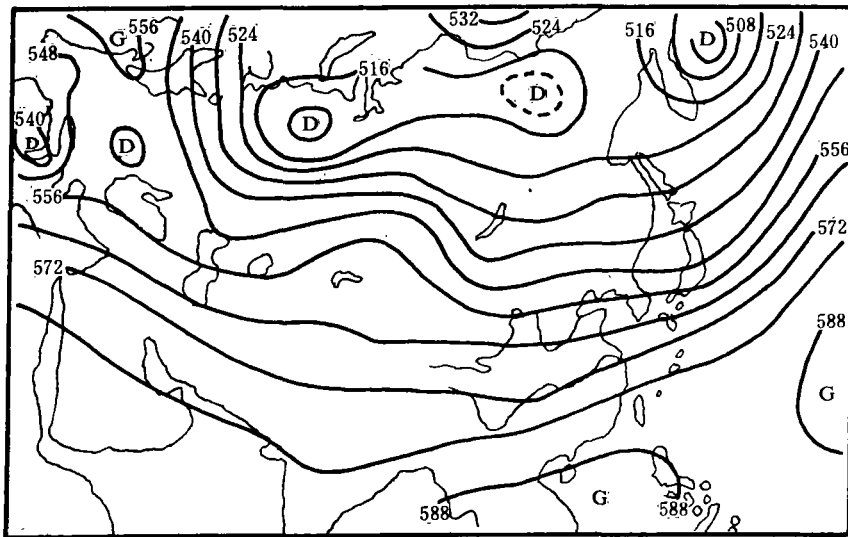


图 6 1978 年 4 月 29 日 08 时 500 mb 实况

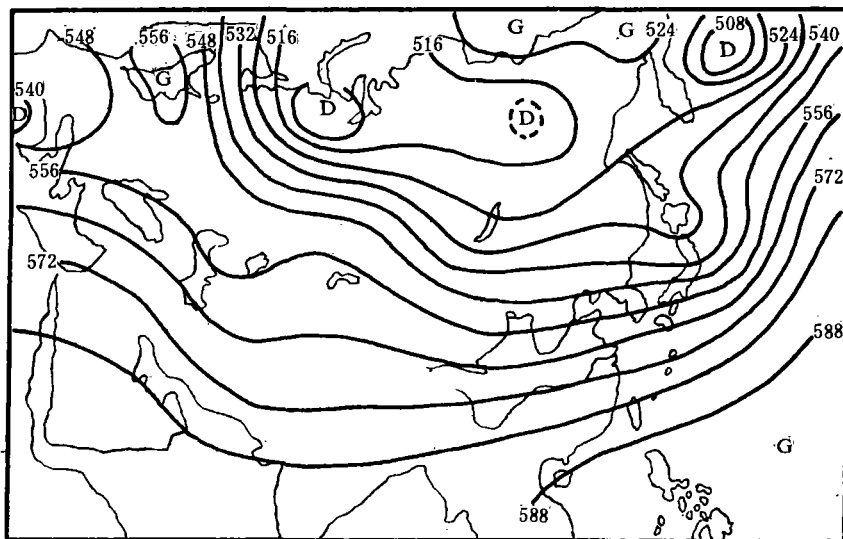


图 7 1978 年 4 月 29 日 08 时 500 mb 变分预报结果

太平洋沿岸的低压涡旋迅速减弱东移至日本以东。

用地转初值所作的 24 小时预报，威海低压较浅，巴尔喀什湖上空高脊偏弱，移速也偏慢；贝加尔湖低槽较浅，而太平洋沿岸的低涡却没有减弱。

用变分初值作 24 小时预报（图 7），则更加趋近于实况。威海槽，巴尔喀什湖脊的强度都报得较好，而且贝加尔湖低槽的发展移动更近于实况。太平洋沿岸低涡减弱东移趋势报得比地转初值好得多，但仍偏深一些。

图 8 清楚地表明了两种不同初值的优劣。如将变分初值的预报位相向前移 2° 经度则与实况廓线几乎重合。

五、小 结

1. 变分约束可把客观分析动力上的合理性与预报模式对初值的要求统一起来处理。

2. 从能量增衰与平稳少变的观点可以选择适当的权重，使观测场和分析场的均方差很小，同时又能使不需要的短波能量有较大的衰减。

3. 选取合理的权重，不但可以同时输入实测风场和气压场进行计算，而且可以在局地嵌入一块实测风场的“窗户”，作出合理的预报。这种试验为使用非定时观测资料，并利用变分约束，使其与正在进行计算的场能够动力协调，而不致形成“冲击”，从而破坏预报场。

但是，采用变分调整后的初始场进行预报仍具有一般正压模式的通病，即动能随时间不断减少，预报的形势场不断变平。我们已试验过，如果在积分过程中不断使用同样的变分约束则动能削减得更快。

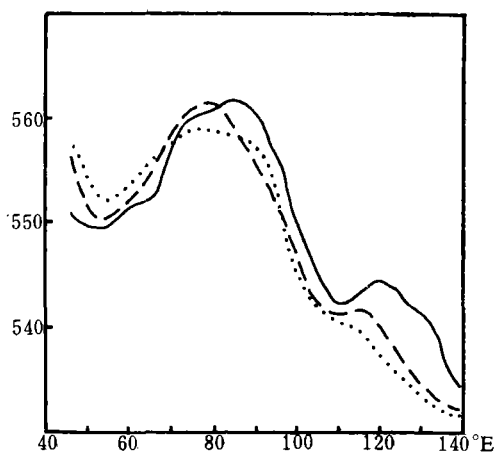


图 8 1978 年 4 月 29 日 08 时沿 45°N ，
500 mb 高度廓线
(实线为实况；点线为地转初值结果；虚线为变分初值结果；纵坐标为位势什米)

参 考 文 献

- [1] 北大数值预报协作组，盛夏东亚地区风压关系的分析，《第二次全国数值预报会议文集》，242—243。
- [2] Lewis, G. M. and T. H. Grayson, *J. Appl. Met.*, 11, 586—597, 1972.
- [3] Sasaki, Y., *J. Met. Soc. Japan*, 36, 77—78, 1958.
- [4] Sasaki, Y., *J. Met. Soc. Japan*, 47, 115—124, 1969.

A TEST OF VARIATIONAL INITIALIZATION FOR A BAROTROPIC PRIMITIVE EQUATION MODEL

Wang Xiao-lin Wu Hui-ding

(Department of Geophysics, Beijing University)

Wang Bao-gen

(Central Station of Marine Hydrometeorological Forecast, National Marine Service)

Abstract

In this paper, we utilize the variational method in the initialization for a barotropic primitive equation model. As a dynamic constraints, the differences between the observed and analyzed fields are at it's minimum subject to the quasigeostrophic relations or the requirement of quasi-steadiness for the primitive equations, and it is required to make the loss of total mean kinetic energy over the analysis area to be minimum. 24-hours 500 mb height forecasts are made and compared with those obtained in taking the geostrophic winds as initial fields. In next experiment some observed data are partly used in the initial field. The forecasting results are improved. The influence of the variational constraint on perturbations are also discussed.