

## ARAKAWA格式非线性计算不稳定的例子\*

季 仲 贞

(中国科学院大气物理研究所)

非线性计算不稳定是计算气象(包括数值天气预报)中的一个突出问题,也是计算数学、计算物理和计算力学中共同关心的一个重要问题。Phillips<sup>[1]</sup>第一个给出了这种非线性计算不稳定的例子,引起人们很大的重视和关注。近二十年来,人们为了得到稳定的计算结果,从大量的计算实践中总结出许多有助于克服非线性计算不稳定的有效措施,也构造了许多计算稳定好的差分格式。其中最著名的、影响最大的就是 Arakawa 从无辐散正压涡度方程所得出的准平方守恒格式<sup>[2]</sup>,通常称之为“Arakawa 格式”。这种格式具有涡度守恒、动能守恒和涡度平方守恒的特性,因此有较好的稳定性。但是,后两个守恒性都是在空间导数项进行差分而时间导数项保持微分的意义下证明的。自然要问,在时间、空间导数项均取差分后,这种格式的稳定性如何呢?是否能完全避免非线性计算不稳定呢?答案是否定的。下面,我们采用类似[1]中所用的方法,具体地给出 Arakawa 格式中的非线性计算不稳定的例子。

考虑正压无辐散涡度方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

其中

$$\zeta = \nabla^2 \psi, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

$\psi$  为流函数。显然

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

利用(2)可将(1)改写为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) = 0 \quad (4)$$

其中  $J(\psi, \zeta) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$  是一个 Jacobian 算子。在

$(x, y)$  空间布网(如图 1), 记网格距  $\Delta x = \Delta y = d$ , 可构造与(4)相应的差分格式

$$\frac{\zeta_{j,k}^{n+1} - \zeta_{j,k}^{n-1}}{2 \Delta t} = J(\psi, \zeta) \quad (5)$$

其中

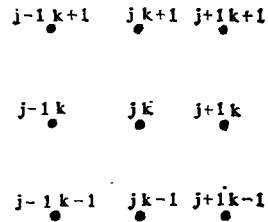


图 1 水平格网

\* 本文于1979年12月30日收到,1980年3月7日收到修改稿。

$$J = \frac{1}{3}(J^{++} + J^{+\times} + J^{\times+}) \quad (6)$$

而

$$J^{++} = \frac{1}{4d^2} [(\psi_{i+1,k}^n - \psi_{i-1,k}^n)(\zeta_{i,k+1}^n - \zeta_{i,k-1}^n) - (\psi_{i,k+1}^n - \psi_{i,k-1}^n)(\zeta_{i+1,k}^n - \zeta_{i-1,k}^n)] \quad (7)$$

$$J^{+\times} = \frac{1}{4d^2} [\psi_{i+1,k}^n(\zeta_{i+1,k+1}^n - \zeta_{i+1,k-1}^n) - \psi_{i-1,k}^n(\zeta_{i-1,k+1}^n - \zeta_{i-1,k-1}^n) - \psi_{i,k+1}^n(\zeta_{i+1,k+1}^n - \zeta_{i-1,k+1}^n) + \psi_{i,k-1}^n(\zeta_{i+1,k-1}^n - \zeta_{i-1,k-1}^n)] \quad (8)$$

$$J^{\times+} = \frac{1}{4d^2} [\zeta_{i,k+1}^n(\psi_{i+1,k+1}^n - \psi_{i-1,k+1}^n) - \zeta_{i,k-1}^n(\psi_{i+1,k-1}^n - \psi_{i-1,k-1}^n) - \zeta_{i+1,k}^n(\psi_{i+1,k+1}^n - \psi_{i+1,k-1}^n) + \zeta_{i-1,k}^n(\psi_{i-1,k+1}^n - \psi_{i-1,k-1}^n)], \quad (9)$$

令

$$\psi_{i,k}^n = \left( C_n \cos \frac{\pi j}{2} + S_n \sin \frac{\pi j}{2} + U_n \cos \pi j \right) \sin \frac{2\pi}{3} k \quad (10)$$

可得

$$\zeta_{i,k}^n = \left( -5 C_n \cos \frac{\pi j}{2} - 5 C_n \sin \frac{\pi j}{2} - 7 U_n \cos \pi j \right) \sin \frac{2\pi}{3} k / d^2 \quad (11)$$

$$J^{++} = -4\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} k \cos \frac{2\pi}{3} k U_n \cos \pi j \left( -C_n \sin \frac{\pi j}{2} + S_n \cos \frac{\pi j}{2} \right) / 4d^4 \quad (12)$$

$$J^{+\times} = \sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} k \cos \frac{2\pi}{3} k \left( S_n \cos \frac{\pi j}{2} - C_n \sin \frac{\pi j}{2} \right) \left( -10 C_n \cos \frac{\pi j}{2} - 10 S_n \sin \frac{\pi j}{2} + 14 U_n \cos \pi j \right) / 4d^4 \quad (13)$$

$$J^{\times+} = \sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} k \cos \frac{2\pi}{3} k \left( S_n \cos \frac{\pi j}{2} - C_n \sin \frac{\pi j}{2} \right) \left( 10 C_n \cos \frac{\pi j}{2} + 10 S_n \sin \frac{\pi j}{2} + 30 U_n \cos \pi j \right) / 4d^4 \quad (14)$$

代入(6)可得

$$J = \frac{40\sqrt{3}}{3} \sin \frac{2\pi}{3} k \cos \frac{2\pi}{3} k U_n \cos \pi j \left( S_n \cos \frac{\pi j}{2} - C_n \sin \frac{\pi j}{2} \right) / 4d^4 \quad (15)$$

另外,由(11)有

$$(\zeta_{i,k}^{n+1} - \zeta_{i,k}^{n-1}) / 2 \Delta t = \frac{-5}{2d^2 \Delta t} \left[ (C_{n+1} - C_{n-1}) \cos \frac{\pi j}{2} + (S_{n+1} - S_{n-1}) \sin \frac{\pi j}{2} + \frac{7}{5} (U_{n+1} - U_{n-1}) \cos \pi j \right] \sin \frac{2\pi}{3} k \quad (16)$$

根据(5)式,对比(15)、(16)两式并考虑到  $j$  的奇偶性可得:

$$\begin{cases} C_{n+1} - C_{n-1} = \frac{2\sqrt{3}\Delta t}{3d^2} U_n S_n \cos \pi j & (j \text{ 偶}) \\ S_{n+1} - S_{n-1} = -\frac{2\sqrt{3}\Delta t}{3d^2} U_n C_n \cos \pi j & (j \text{ 奇}) \\ U_{n+1} - U_{n-1} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

其中利用了关系式

$$2 \sin \frac{2\pi}{3} k \cos \frac{2\pi}{3} k = -\sin \frac{2\pi}{3} k \quad (18)$$

记  $\sigma = \frac{2\sqrt{3}\Delta t}{3d^2}$ , 于是(17)可写为

$$\begin{cases} C_{n+1} - C_{n-1} = \sigma S_n U_n \\ S_{n+1} - S_{n-1} = \sigma C_n U_n \\ U_{n+1} - U_{n-1} \end{cases} \quad (19)$$

从形式上看, (19)式与[1]中(8)式及[3]中(19)式是完全相同的(当然 $\sigma$ 数值不同), 因此我们可以类似地进行稳定性分析。由(19)第三式知,  $U^n$  必循环交替地取两个常数, 不妨设为  $A$  和  $B$ , 由(19)的前两式可得

$$C_{n+2} - 2\mu C_n + C_{n-2} = 0 \quad (20)$$

其中  $\mu = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 AB$ 。对于  $S_n$  可以得到类似的方程。由此知, 若  $|\mu| < 1$ , 则  $C_n, S_n$  有界; 若  $|\mu| > 1$ , 则  $C_n, S_n$  随  $n$  指数增长。换言之, 若  $A, B$  反号且  $-4 < \sigma^2 AB < 0$ , 则  $C_n, S_n$  有界, 格式计算稳定; 若  $A, B$  反号且有  $\sigma^2 AB < -4$ , 或者  $A, B$  同号, 则解随  $n$  指数增长, 即出现计算不稳定。但前者的不稳定可以用缩小  $\Delta t$  来克服, 而后者却不能, 因此,  $A, B$  反号时出现的是线性计算不稳定, 而在  $A, B$  同号时所出现的不稳定是非线性计算不稳定。

总之, 从计算稳定性的角度看, 这个例子再一次说明瞬时平方守恒格式如果不外加耗散项, 并不能完全避免非线性计算不稳定<sup>[3][4]</sup>, 而类似[4]中所建议的完全平方守恒格式是更为可取的。

### 参 考 文 献

- [1] Phillips, N. A., "An example of nonlinear computational instability" The atmosphere and the sea in motion, Edited by B. Bolin 1959, Rockefeller Institute, New York, P. 501—504.
- [2] Arakawa, A., "Computational design for long-term numerical integrations of the equations of atmospheric motion" *J. comp. phys.*, 1, 119—143 1966.
- [3] 季仲贞, 二维 Lilly 格式中非线性计算不稳定的例子, 科学通报, 1980年19期, 890—892.
- [4] 季仲贞、曾庆存, 发展方程差分格式的构造和应用, 1979("大气科学"即将发表)。