

球坐标中原始运动方程的自由振动*

狄新武 周紫东 杜行远

(中央气象局气象科学研究所)

提 要

利用球坐标中的原始运动方程组,讨论了大气的自由振动问题。把东、西风平均纬向风速廓线,以及与之相适应的位势高度廓线作为大气的基本状态,对线性化方程组,采用数值方法求出了特征波动解。比较了四阶差分和二阶差分的特征解,肯定了前者有较好的结果。

一、引 言

大气的自由振动对于了解大气动力学的特性、运动的稳定性以及设计数值预报方案,都有十分重要的意义。目前已有的一些工作^[1-3],或假定平均纬向风速为零,或虽用了较现实的纬向风速廓线,但却未考虑位势高度的变化。

本文克服了以上的缺陷,在考虑纬向东、西风廓线的同时,还考虑了与之相适应的位势高度廓线。比较了一般中央差分格式(二阶差分)与四阶差分格式的结果。还讨论了急流型与非急流型等典型天气形势下大气自由振动的差别。

二、基本方程及其求解方案

以 λ 表示经度, θ 表示纬度, ω 表示地球自转角速度, a 表示地球半径,则在球坐标中两个水平运动方程和连续方程可写作^[4]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{uv}{a} \operatorname{tg} \theta - 2 \omega \sin \theta \cdot v + \frac{g}{a \cos \theta} \frac{\partial h}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u^2}{a} \operatorname{tg} \theta + 2 \omega \sin \theta \cdot u + \frac{g}{a} \frac{\partial h}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \theta} \frac{\partial h}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial h}{\partial \theta} + h \left(\frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{v}{a} \operatorname{tg} \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 λ 和 θ 方向上的风速 u, v 以及高度 h 都是 λ, θ 和 t 的函数。设有基本状态 U, H ,只是 θ 的函数,令

$$u = U + u', \quad v = v', \quad h = H + h' \quad (2)$$

假定基本状态 $U(\theta)$ 和 $H(\theta)$ 满足(1),得到 U 和 H 之间应满足的关系为

$$\frac{U^2}{a} \operatorname{tg} \theta + 2 \omega \sin \theta \cdot U + \frac{g}{a} \frac{dH}{d\theta} = 0 \quad (3)$$

将(2)代入(1),分出基本状态方程(3),并忽略小扰动的二次项,即可得到描写 $u',$

* 本文于1979年12月1日收到,1981年2月19日收到修改稿。

v' 和 h' 的方程组。为简便计, 省略去右上角一撇, 并记

$$F(\theta) = 2\omega \sin \theta + \frac{2U}{a} \operatorname{tg} \theta$$

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{U}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

则 u 、 v 、 h 应满足的方程组可以写作如下形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta t} + \frac{v \cos \theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{U}{\cos \theta} \right) - Fv + \frac{g}{a \cos \theta} \frac{\partial h}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\delta v}{\delta t} + Fu + \frac{g}{a} \frac{\partial h}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\delta h}{\delta t} + \frac{v}{a} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{H}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

在方程组(4)中出现的平均纬向风速 U 和高度 H 满足关系式(3)。根据气象资料, 在低纬度盛行东风, 在中高纬度盛行西风, 东、西风的分界线在 20° 附近, 于是风速廓线 $U(\theta)$ 可用下式来描写

$$U(\theta) = \left\{ \begin{aligned} -u_E \cos^n \frac{9}{2} \theta, & \quad \theta \leq \frac{\pi}{9} \\ u_W \cos^n \left(\frac{18}{7} \theta - \frac{11}{14} \pi \right), & \quad \frac{\pi}{9} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 u_E 为东风最大值, 出现在赤道, 而 u_W 为西风最大值, 出现在 55° 。

令 $n=2$, 所得到的是一般天气形势下风速廓线(非急流型)。若令 $n=22$, 则得到急流型的风速廓线。不同天气形势下的高度廓线, 都可以由下式计算得出

$$H(\theta) = 10^4 - \frac{1}{g} \int_0^\theta U(2\omega a \sin \theta_1 + U \operatorname{tg} \theta_1) d\theta_1 \quad (6)$$

这里, 设赤道地区的高度 $H(0) = 10^4$ 米。

现在我们来讨论在 U 、 H 给定时, (4) 式的求解问题。设存在如下形式的纬向波动解

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{h} \end{pmatrix} e^{i(k\lambda - \nu t)} \quad (7)$$

其中 \hat{u} 、 \hat{v} 和 \hat{h} 为振幅, 只是纬度 θ 的函数。将(7)式代入(4)式后, 再令

$$u^* = i\hat{u}, \quad v^* = \hat{v}, \quad h^* = i\sqrt{\frac{g}{H}} \hat{h}$$

注意到虚数 i 的引入, 是使位相差 $\frac{\pi}{2}$, 这是考虑到下述天气事实: 在相邻高、低压附近的纬向风速极值是与高度极值同位相的, 而经向风速的极值却与之相差 $\frac{\pi}{2}$ 。再记 $c = \sqrt{gH}$, $\sigma = \cos \theta$, 则(4)式化为

$$D_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_{j+2}}{12a\delta\theta} \\ 0 & -\frac{c_j \sigma_{j+2}}{12\sigma_j a\delta\theta} & 0 \end{bmatrix}, \quad E_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_{j-2}}{12a\delta\theta} \\ 0 & \frac{c_j \sigma_{j-2}}{12\sigma_j a\delta\theta} & 0 \end{bmatrix}.$$

(10) 式虽然只是写在半球上, 但却可以得到全球范围内的解, 因为在两半球平均纬向风速分布是对称的情况下(见(5)式), 在全球范围内(10)式可以有对称的和反对称的两组解答。

对称解时有 $v_o^* = 0$, $u_j^* = u_{-j}^*$, $h_j^* = h_{-j}^*$, 此时

$$Y_o = [u_o^*, h_o^*]^T,$$

$$A_o = \begin{bmatrix} \frac{U_o k}{a} & \frac{kc_o}{a} \\ \frac{kc_o}{a} & \frac{U_o k}{a} \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \frac{c_o \sigma_1}{a\sigma\theta} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \frac{c_o}{a\delta\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_o \sigma_2}{6a\delta\theta} & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_o}{12a\delta\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在反对称时, 有 $u_o^* = h_o^* = 0$, $v_j^* = v_{-j}^*$, 此时

$$Y_o = [v_o^*], \quad A_o = \left[\frac{U_o k}{a} \right],$$

$$B_o = \left[0, 0, -\frac{4}{3} \frac{c_1}{a\delta\theta} \right], \quad D_o = \left[0, 0, \frac{c_2}{6a\delta\theta} \right],$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \frac{c_1}{\sigma_1 a\delta\theta} \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c_2}{12\sigma_2 a\delta\theta} \end{bmatrix}.$$

于是, 在对称情况下, (10)式是一个 26 阶的矩阵, 而在反对称的情况下是一个 25 阶的矩阵。

当采用一般的中央差分格式(二阶精确度)时, 矩阵 L 的内容要较上述的为简单, 即分块矩阵 D_j 及 E_j 恒等于零; 而在分块矩阵 A_j 、 B_j 、 C_j 中, 其元素的系数要改变。具体的形式可参阅[1]。

关于边界条件, 对于赤道可以利用对称或反对称的性质。在极地, 由于纬圈收缩为一个点, 而函数只应为单值, 所以除 $K=0$ 时的 h_o^* 以外, 所有其它函数值在极地均为

零。当 $K=0$ 时, h_9^* 的值可由连续方程求得, 即令极地变高与极冠面积之乘积等于沿 80° 纬圈的高度流入量, 于是可得

$$\nu h_9^* = -\sqrt{\frac{H_8}{H_9}} \cdot \frac{2c_8}{a\delta\theta} \nu_8^* \quad (11)$$

此时矩阵的阶数要增加 1, 即要多三个分块矩阵

$$A_9 = [0], \quad C_9 = \left[0, -\frac{2c_8}{a\delta\theta} \sqrt{\frac{H_8}{H_9}}, 0 \right],$$

$$B_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{c_9}{2a\delta\theta} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

三、求解的结果

取 $u_E=10$ 米/秒, $u_W=30$ 米/秒, 当(5)式中 $n=2$ 和 $n=22$, 以及(7)式中 $K=1, 4, 7, 10$ 时, 分别采用二阶和四阶差分格式, 在正、反对称的情况下, 分别求解了(10)式的特征值问题。

当 $U=0$ 时, $H=10^4$ 为常数, 此时方程组就退化为正压大气潮汐方程。它的特征函数即 Hough 函数^[5]。为了便于作比较, 考察平均纬向风速的作用和截断误差的影响, 我们也采用了二差和四阶差分格式, 在 $U=0$ 的条件下, 求解了(10)式的特征值问题。

表 1 $U=0, k=1, \quad$ 二阶差分

l	GE	M	GW	M	R	M
0	5.3550 E-5	0	-1.3594 E-4	2	-5.2622 E-5	0
1	1.1451 E-4	1	-1.6091 E-4	1	-1.5576 E-5	4
2	1.8184 E-4	2	-2.0285 E-4	2	-1.5363 E-5	1
3	2.0815 E-4	3	-2.2391 E-4	3	-8.0838 E-6	6
4	2.5657 E-4	4	-2.6129 E-4	4	-5.2096 E-6	3
5	2.6835 E-4	5	-2.7626 E-4	5	-3.2068 E-6	4
6	2.9274 E-4	6	-3.1255 E-4	6	-1.7991 E-6	5
7	2.9626 E-4	7	-3.8646 E-4	7	-1.1015 E-7	7
8	3.8703 E-4	8	-3.8703 E-4	8	5. E-12	10
9	3.8646 E-4	9	-2.9626 E-4	9	1.1015 E-7	9
10	3.1255 E-4	10	-2.9274 E-4	10	1.7991 E-6	11
11	2.7626 E-4	11	-2.6835 E-4	11	3.2068 E-6	12
12	2.6129 E-4	12	-2.5657 E-4	12	5.2096 E-6	13
13	2.2391 E-4	13	-2.0815 E-4	13	8.0838 E-6	10
14	2.0285 E-4	14	-1.8184 E-4	14	1.5363 E-5	15
15	1.6091 E-4	15	-1.1451 E-4	15	1.5576 E-5	12
16	1.3594 E-4	14	-5.3550 E-5	16	+5.2622 E-5	16
I_1	1		1		13	
I_2	2		2		22	

表 2 $U=0, k=1$, 四阶差分

l	GE	M	GW	M	R	M
0	5.4134 E-5	0	-1.3388 E-4	2	-6.3188 E-5	0
1	1.3263 E-4	1	-1.6907 E-4	1	-1.3918 E-5	1
2	1.8888 E-4	2	-2.0565 E-4	2	-8.6623 E-6	2
3	2.3768 E-4	3	-2.4623 E-4	3	-5.5311 E-6	3
4	2.8217 E-4	4	-2.8744 E-4	4	-3.9347 E-6	4
5	3.2321 E-4	5	-3.2636 E-4	5	-2.6239 E-6	5
6	3.5866 E-4	6	-3.6011 E-4	6	-1.8867 E-6	6
7	3.8082 E-4	7	-3.8990 E-4	7	-1.1350 E-6	7
8	3.9659 E-4	8	-3.9669 E-4	8	-6.5484 E-7	8
9	4.4134 E-4	9	-4.4135 E-4	9	-3.1890 E-8	9
10	4.4117 E-4	10	-4.4116 E-4	10	4.7556 E-7	10
11	3.9006 E-4	9	-3.8083 E-4	11	1.3028 E-6	11
12	3.5574 E-4	12	-3.5385 E-4	12	2.2466 E-6	12
13	3.1235 E-4	13	-3.0719 E-4	13	4.0780 E-6	13
14	2.5736 E-4	14	-2.4646 E-4	14	7.0341 E-6	14
15	1.9942 E-4	15	-1.6791 E-4	15	1.4018 E-5	15
16	1.5162 E-4	16	-5.7248 E-5	16	7.9917 E-5	16
I_1	1		1		0	
I_2	2		2		0	

表 3 $n=2, k=1$, 二阶差分

l	GE	M	GW	M	R	M
0	5.3770 E-5	0	-1.3039 E-4	2	-5.0245 E-5	0
1	1.1390 E-4	1	-1.5494 E-4	3	-1.4921 E-5	1
2	1.8173 E-4	2	-1.9534 E-4	2	-9.4501 E-6	4
3	2.0754 E-4	3	-2.1792 E-4	3	-6.5677 E-6	6
4	2.5611 E-4	4	-2.5316 E-4	4	-3.8994 E-6	3
5	2.6763 E-4	5	-2.7095 E-4	5	-2.3600 E-6	4
6	2.9208 E-4	6	-2.8737 E-4	6	-1.8629 E-7	5
7	2.9532 E-4	7	-2.8842 E-4	7	1.3928 E-6	6
8	3.7189 E-4	8	-3.5883 E-4	7	2.9761 E-6	7
9	3.7175 E-4	9	-3.5867 E-4	8	4.0374 E-6	8
10	3.0953 E-4	6	-2.9327 E-4	6	5.3243 E-6	9
11	2.7568 E-4	11	-2.6157 E-4	11	5.5154 E-6	9
12	2.6069 E-4	12	-2.4723 E-4	12	8.6590 E-6	10
13	2.2575 E-4	13	-2.0062 E-4	13	8.9092 E-6	11
14	2.0691 E-4	14	-1.7348 E-4	12	1.6903 E-5	15
15	1.6274 E-4	15	-1.1166 E-4	15	1.9022 E-5	12
16	1.3594 E-4	14	-5.3615 E-5	16	5.1167 E-5	16
I_1	2		6		14	
I_2	6		12		22	

表 4 $n=2, k=1$, 四阶差分

l	GE	M	GW	M	R	M
0	5.4261 E-5	0	-1.3346 E-4	2	-6.2158 E-5	0
1	1.3288 E-4	1	-1.6927 E-4	1	-1.4866 E-5	1
2	1.9072 E-4	2	-2.0350 E-4	2	-8.3679 E-6	2
3	2.4020 E-4	3	-2.4095 E-4	3	-4.3423 E-6	3
4	2.8418 E-4	4	-2.8015 E-4	4	-2.0826 E-6	4
5	3.2373 E-4	5	-3.1794 E-4	5	-5.4263 E-7	5
6	3.5759 E-4	6	-3.5143 E-4	6	5.3538 E-7	6
7	3.7947 E-4	7	-3.7636 E-4 +19.4207 E-7	11	1.9589 E-6	7
8	3.9538 E-4	8	-3.8802 E-4	8	3.3403 E-6	8
9	4.2846 E-4	9	-4.1517 E-4	9	5.3259 E-6	(11)
10	4.2810 E-4	10	-4.1451 E-4	10	(± 15.7030 E-8)	(11)
11	3.8844 E-4	9	-3.7636 E-4 -19.4207 E-7	11	(6.0302 E-6)	(10)
12	3.5405 E-4	12	-3.4431 E-4	12	(± 12.7465 E-7)	(10)
13	3.1120 E-4	13	-2.9711 E-4	13	7.9817 E-6	11
14	2.6060 E-4	14	-2.3674 E-4	14	1.1036 E-5	14
15	2.1105 E-4	15	-1.6173 E-4	15	1.7352 E-5	15
16	1.6241 E-4	12	-5.6235 E-5	16	8.3787 E-5	16
I_1	2		2		5	
I_2	6		6		8	

我们采用了推广的 Jacobi 方法^[6,7], 将矩阵 L 所有的特征值和特征向量同时都求出来。由于这里矩阵的阶数比较高, 所以给出的允许误差为 10^{-20} , 远比求解 14 阶矩阵时为严格^[8]。

正、反对称的结果, 加在一起, 共有 51 个互不相同的特征值和特征向量, 特征值即自由振动的频率。在表 1—4 中, 是求得的部分结果。

表 4 中出现了三对共轭复数, 虚数部分的数值很小, 即正压不稳定很弱, 使振幅增长 e 倍的时间一般都长达一、二十天以上, 与[2]中的结果相似。

在每一个表中, 我们将 51 个频率分为三类: 向东和向西传播的重力波 GE 和 GW , 以及 Rossby 波 R , 其中绝对值最小的 17 个频率 (有个别的例外) 表示 Rossby 波的频率, 其余 34 个频率中 17 个负的频率表示向西传播的重力波频率, 17 个正的频率表示向东传播的重力波频率。特征向量表示波动的经向特征, 也称波型。向东、向西的重力波型中的高度和 Rossby 波型中的经向速度在经向方向上符号改变的次数即零点, 称为经向指数, 以 M 表示之。

在解析解的情况下, 即当纬向平均风速为零和无截断误差时, 经向指数 M 应与上述各种波型的序号 l 完全一致。在表 1、表 2 中的结果, 只存在着经向方向上的截断误差, 而其后的两个表中除截断误差之外, 还受平均纬向风速的影响。因此, 顺序号 l 与经向指数 M 间是会有差异的。为了定量地说明这种差异, 引进两个差异参数 I_1 和 I_2 。 I_1 表示每类 17 个频率中经向指数与顺序号不一致的个数, I_2 表示每类 17 个频率中经向指

数与顺序号差值的绝对值的和。 I_2 和 I_1 愈小，截断误差和平流对频率的影响就愈小。对每类频率 I_1 和 I_2 的值分别列在表的最末二行。

从表中可以看出：

当 $U=0$ 时，即在只有截断误差存在的情况下，比较二阶差分 and 四阶差分，很明显，采用高精度的四阶差分所得到的结果，都有所改进，特别是对 Rossby 波型说来，更是非常显著，它的经向指数 M 与序号 l 完全一致。因此，采用四阶差分，减小截断误差，提高计算精确度，对 Rossby 波型说来，更为有效。当 $U \neq 0$ 时，由于平均纬向风速的影响，情况要复杂得多，但总的说来，上述结论仍然成立。

总之，由于截断误差对 Rossby 波型频率的影响较为明显，因此采用四阶差分后就明显改进了 Rossby 波型频率。这就为在数值天气预报中，采用四阶差分格式方案来提高对 Rossby 波的描写能力提供了一个强有力的依据。

四、各类自由振动的描写

我们不可能对大气的所有自由振动，都一一给予描述，而只能在每类振动中，各选几个。在图 1—图 4 中，根据本文中用四阶差分的计算结果，依次绘出了 GE 的 $l=0$ ， R 的 $l=0$ ，和 R 的 $l=3$ 等各种自由振动中 u^* (实线)， v^* (虚线) 和 h^* (点线) 的波型随纬度的分布图。

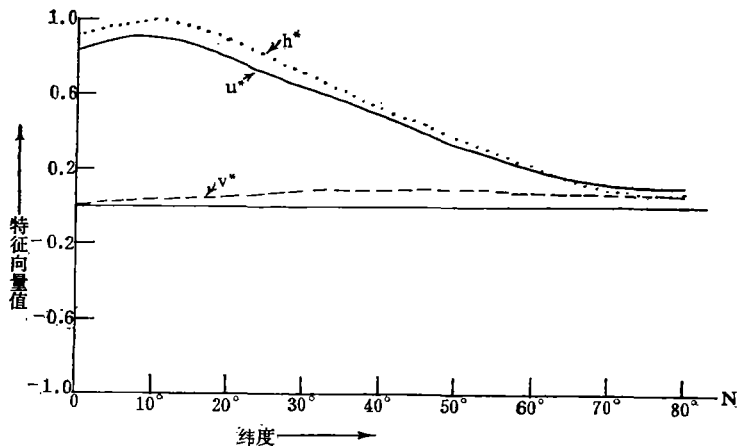


图 1 $n=22, k=1$, 四阶差分 $l=0, GE$ 波型随纬度分布

这里 u^* 、 v^* 和 h^* 分别表示各类波型中东西风、南北风和位势高度的特征向量值。

为了考察 Rossby 波型和重力波型的准无辐散性和准地转性，还计算了在低纬 (20°) 和高纬 (70°) 处风的涡度 (vor, 单位: 10^{-7} 秒 $^{-1}$)、散度 (div, 单位: 10^{-7} 秒 $^{-1}$) 以及地转风的偏差值 (u'_g, v'_g , 单位: 米秒 $^{-1}$) 的绝对值，计算结果列在表 5 中。

采用的计算公式为

$$\text{vor}_j = \frac{1}{a \cos \theta_j} \left(u_j^* \sin \theta_j - k v_j^* - \frac{u_{j+1}^* - u_{j-1}^*}{2 \Delta \theta} \right)$$

$$\text{div} = \frac{1}{a \cos \theta_j} \left(k u_j^* + \frac{v_{j+1}^* - v_{j-1}^*}{2 \Delta \theta} - v_j^* \sin \theta_j \right)$$

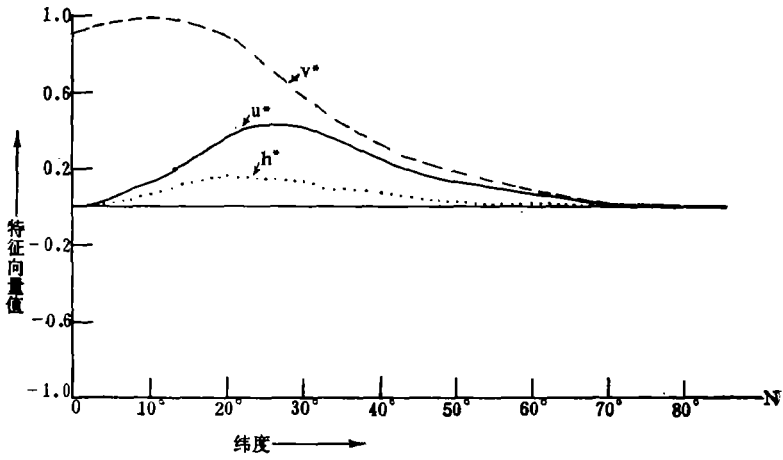


图 2 $n=22, k=4$, 四阶差分 $l=0$, R波型随纬度分布

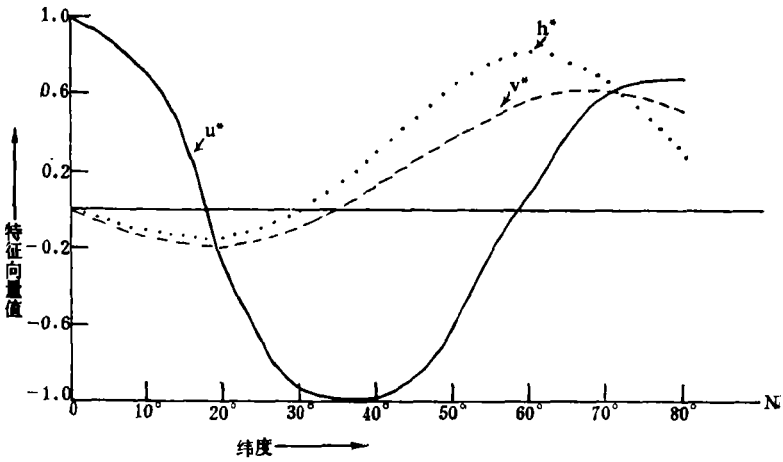


图 3 $n=2, k=1$, 四阶差分 $l=3$, R波形随纬度分布

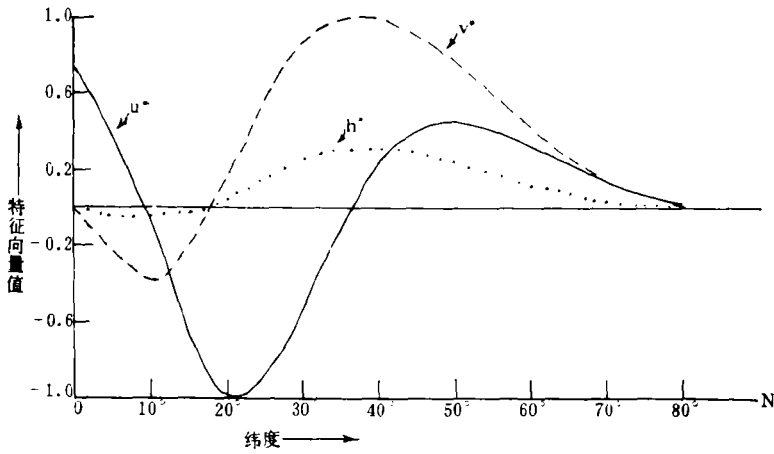


图 4 $n=2, k=4$, 四阶差分 $l=3$, R波型随纬度分布

表 5 在低纬和高纬, 典型波型的一些物理参数值

n	k	1	波型	纬度	vor	div	u_g'	u^*	v_g'	v^*
2	1	3	R	20°	8.0	0.04	0.05	0.3	0.1	0.2
				70°	8.2	0.7	0.04	0.6	0.1	0.6
22	4	0	R	20°	7.0	0.1	0.5	0.4	0.3	0.9
				70°	0.77	0.77	0.005	0.03	0.01	0.02
2	4	3	GW	20°	0.9	6.7	2.2	0.4	5.2	0.3
				70°	4.2	1.2	1.0	0.4	0.9	0.4

$$u_{g_j}' = u_j^* + \frac{g}{2\omega a} \sqrt{\frac{H}{g}} \frac{1}{\sin \theta_j} \frac{(h_{j+1}^* - h_{j-1}^*)}{2\Delta\theta}$$

$$v_{g_j}' = v_j^* - \frac{g}{2\omega a} \sqrt{\frac{H}{g}} \frac{2k}{\sin 2\theta_j} h_j^*$$

一些符号的意义见文献[1]。

各种波型的特点如下：

图 1 为 $U \neq 0$, $n=22$, $k=1$, GE 的 $l=0$ 时向东传播的 Kelvin 波型, 它是重力波型中频率最低的, 其纬向风速分布和高度分布与赤道对称。由于平均纬向风速的存在, 使我们这里得到的结果与典型的 Kelvin 波有些偏离。但是从图上仍然可以看出, 经向风速要比纬向风速小一个数量级, 这正是 Kelvin 波型区别于其它重力波型的一个明显的特点。在低纬度, 特别在赤道上, Kelvin 波型有最大的纬向速度扰动以及高度扰动, 因此, 它在赤道地区比其它地区容易发展。所以 Kelvin 波型是一类赤道地区的波动。上述特点与作者分析赤道地区大气波动所得到的结果是一致的^[8]。

图 2 为 $U \neq 0$, $n=22$, $k=4$, R 的 $l=0$ 时向西传播的混合 Rossby 重力波型, 它是 Rossby 波型中频率最高的, 其纬向风速分布和高度分布与赤道反对称。从图上可以看出, 它在赤道附近有最大的经向速度扰动, 因此, 这类波动主要反映在风场上, 并且可以容易地用赤道地区观测到的经向风速分量把它辨认出来。

根据表 5 第二行, 混合 Rossby 重力波型在低纬度, 散度比涡度小一个量级, 但地转风的偏差值与风场本身有同一数量级。因而在低纬度地转关系是不适用的, 但作为第一近似, 可以认为风是无辐散的。在高纬度, 风场很弱, 散度和涡度具有同样的数值, 地转偏差很大。

图 3 和图 4 分别为 $k=1$ 和 $k=4$ 的 Rossby 波型, 可以看出, Rossby 波型在低纬度的高度扰动较弱, 而风场的扰动则比较明显, 这意味着 Rossby 波型在低纬度主要是由风场反映出来的。

根据表 5 首行, 很明显, 风的散度比涡度小两个数量级, 而地转风的偏差值比风场本身的数值也小得多。因此, 作为第一近似, 可以把 Rossby 波型看作是无辐散的和地转的。

应该指出, 经向指数 M 与经向波数有关。在数值计算中, 我们取的差分格距为 10° ,

所以对于波长小于 2 倍格距 (即 20° 的经向波动, 相当于序号 l 等于或大于 8 的波型) 在我们的计算结果中不可能很好地描述出来, 它的误差较大, 也可称这类波型为计算波型。图 5 就是我们给出的一个计算波型例子。

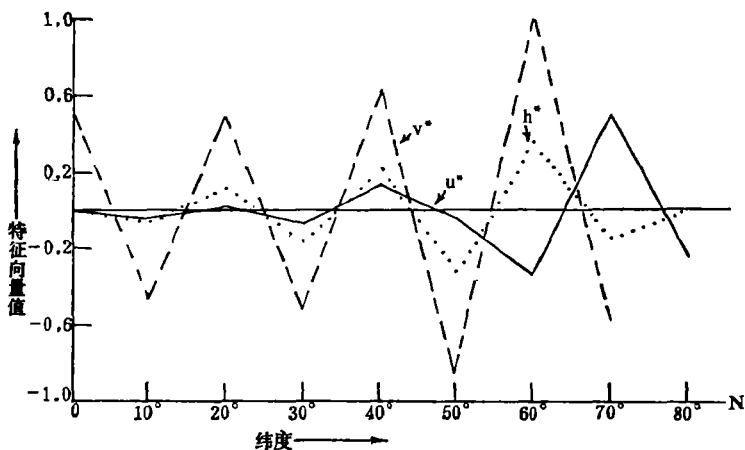


图 5 $n=2$, $k=4$, 四阶差分 $l=16$, R 波型随纬度的振动

五、平均纬向风速的作用

当 $U=0$ 时, 正压原始运动方程中包含了向东和向西传播的重力波型以及向西传播的 Rossby 波型^[6], 在表 1—表 2 中, 虽然出现了向东传播的 Rossby 波型, 但由于差分步长为 10° , 共 17 个格点, 因此, 能够分辨的 Rossby 波型只是经向指数 $M \leq 8$ 的波型, 这样, 在 $U=0$ 时, 就只存在向西传播的 Rossby 波型。

考虑平均纬向风速后, 平均纬向风速对向西传播的 Rossby 波型的相速比对重力波型的相速有更明显的影响。它使其相速变慢, 可以改变波型的频率达一个数量级, 并且甚至出现了向东传播的 Rossby 波型。一般说来, 差分精确度越高, 向东传播的 Rossby 波型愈明显。

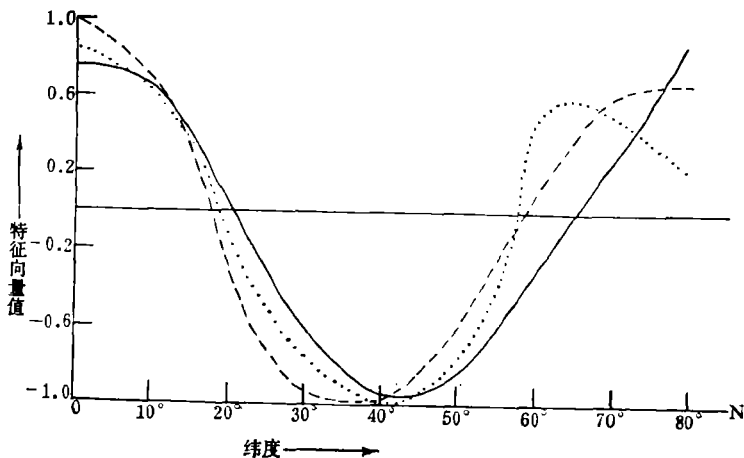


图 6 $k=1$, 四阶差分, $l=3$, R 波型中 u^* 随纬度的分布

为了比较平均纬向风速对各种波型的影响，在图 6—8 中，分别绘出了当 $U=0$ 时（实线）、急流型时（点线）和非急流型时（断线）Rossby 波型 $l=3$ 的 u^* , v^* 和 h^* 随纬度变化的曲线图。

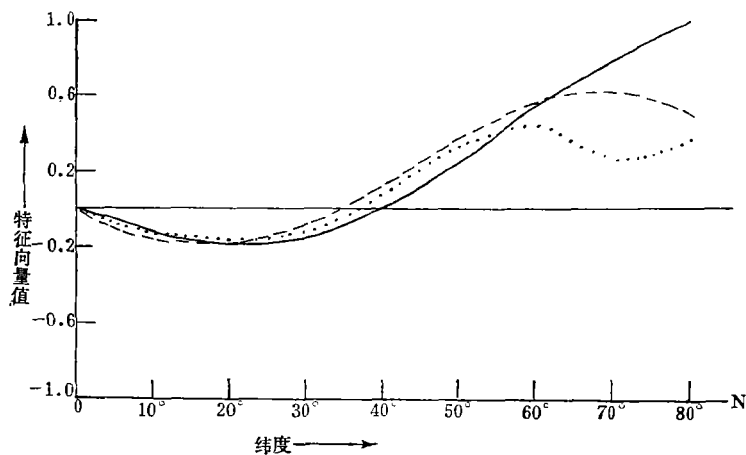


图 7 $k=1$, 四阶差分, $l=3$, R 波形中 U^* 随纬度的分布

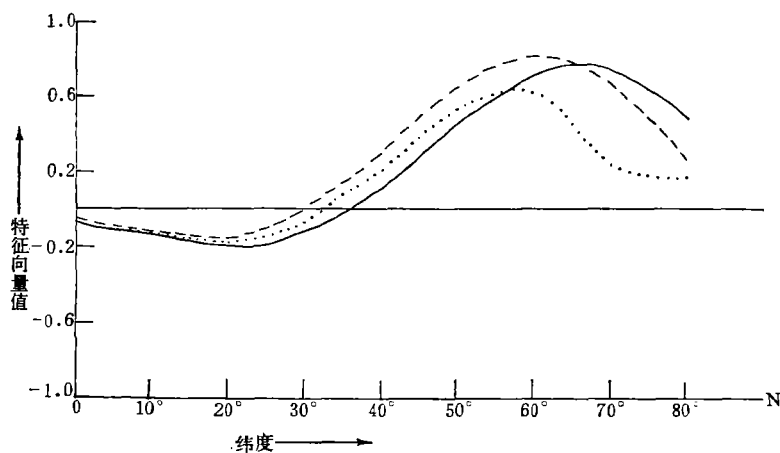


图 8 $k=1$, 四阶差分, $l=3$, R 波形中 h^* 随纬度的分布

可以看出，平均纬向风速对特征波动的作用是很明显的，而且各种不同纬向风速廓线之间的差别也是不容忽视的。特征波动的经向指数愈大，平均纬向风速的作用也愈大。所以，使用非线性正交波型作初值化和四维同化时，在大气基本状态中，按照不同的季节或天气形势，来考虑平均纬向风速和位势高度的分布^[3]，是值得提倡的。

致谢：在本研究工作完成过程中，蔡中熊、王五在两同志曾先后给予不少帮助，作者深为感谢。

参 考 文 献

- [1] Dickinson, R. E., Williamson, D. L., Free oscillations of a discrete stratified fluid with application to numerical weather prediction, *J. Atmos. Sci.*, **29**, 623—639, 1972.
- [2] Machenhauer, B., On the dynamics of gravity oscillations in a shallow water model with applications to normal mode initialization, *Contrib. Atmos. phys.* **50**, No. 1—2, 253—271, 1977.
- [3] Du Xing-yuan, A Review of the Normal Mode Initialization Method, ECMWF Technical Reports, No. 20, 1980.
- [4] 曾庆存, 数值天气预报的数学物理基础, 第一卷, 科学出版社, 1979.
- [5] Flattery, T. W., Spectral models for global analysis and forecasting Proc. Sixth AWS, Tech. Exchange Conf. U. S. Naval Academy, 21—24 sept. 1974, Air Weather Service Tech. Dept., **242**, 42—54, 1980.
- [6] Eberlein, P. J., J. Boothroyd, Solution to the complex Eigenproblem by a norm reducing Jacobi type method, *Numer. Math.* **14**, 232—245, 1970.
- [7] Eberlein, P. J., J. Boothroyd, Solution to the Eigenproblem by a norm Reducing Jacobi type method, *Numer. Math.* **11**, 1—12, 1968.
- [8] 周紫东、狄新武、杜行远, 赤道地区大气波动的理论分析, *中国科学*, **5**, 475—484, 1980。

FREE OSCILLATIONS OF THE PRIMITIVE EQUATIONS OF MOTION IN SPHERICAL COORDINATES

Di Xin-wu Zhou Zi-dong Du Xing-yuan

(Academy of Meteorology, Central Meteorological Service)

Abstract

By using the primitive equations of motion in spherical coordinates, free oscillations of the atmosphere are discussed. These equations are linearized in relation to the atmospheric basic state. The easterly, as well as westerly mean zonal wind profile, and the associated geopotential profile are included in the basic state. Numerical method is applied to obtain the characteristic wave solutions. The eigensolutions by 2-order difference scheme are compared with those obtained by utilizing 4-order difference scheme. The eigensolutions for basic state at rest are also compared with those obtained under the assumption of a basic state with zonal wind profile of jet and non-jet type. Some discussion about how to apply the results to data assimilation is also made.