第41卷 第3期 气 象 学 报 Vol. 41, No. 3
1983年8月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Aug., 1983

# 大气线性波动的统一解*

刘 式 适

（北京大学地球物理系）

本文从描写大气运动的热力-动力方程组出发，在无摩擦和绝热的条件下，统一地分析了在中高纬度和低纬度所包含的大气线性波动。这种分析对于海洋波动基本上也是合适的。

## 1. 基本方程组

我们采用通常的局地坐标系$(x,y,z)$，相应的空气速度为$(u,v,w)$，又设空气的压强、密度和温度分别是$p,\rho,T$，则在无摩擦和绝热条件下，描写大气运动的基本方程组可以写为

$$\begin{cases} du/dt-fv=-1/\rho\,\partial p/\partial x \\ dv/dt+fu=-1/\rho\,\partial p/\partial y \\ dw/dt=-g-1/\rho\,\partial p/\partial z \\ \partial\rho/\partial t+\partial\rho u/\partial x+\partial\rho v/\partial y+\partial\rho w/\partial z=0 \\ p=\rho RT \\ d\ln p/dt=\gamma\, d\ln\rho/dt \end{cases} \tag{1}$$

其中$t$为时间，$f$为Coriolis参数，$R$为气体常数，$g$为重力加速度，$\gamma=c_p/c_v$ ($c_v,c_p$分别为定容和定压比热)，且

$$d/dt=\partial/\partial t+u\,\partial/\partial x+v\,\partial/\partial y+w\,\partial/\partial z \tag{2}$$

方程组(1)是封闭的，如撇开状态方程，也还是封闭的。除极高纬外，它适合于整个大气。

设大气的基本状态为

$$\bar{u}=0,\bar{v}=0,\bar{w}=0,\bar{p}=\bar{p}(z),\bar{\rho}=\bar{\rho}(z),\bar{T}=\bar{T}(z) \tag{3}$$

这样做，不失一般性，而且运算上简便。

(3) 严格地满足(1)有

$$\partial\bar{p}/\partial z=-g\bar{\rho},\bar{p}=\bar{\rho}R\bar{T} \tag{4}$$

我们把大气波动看成是迭加在(3)上的扰动所形成的，即设

$$\begin{cases} u=u',v=v',w=w' \\ p=\bar{p}(z)+p',\rho=\bar{\rho}(z)+\rho',T=\bar{T}(z)+T' \end{cases} \tag{5}$$

---

* 本文于1981年1月8日收到，1981年11月30日收到修改稿。

带"′"的量是扰动量，且假定 $p' \ll \bar{p}, \rho' \ll \bar{\rho}, T' \ll \bar{T}$。

将(5)代入(1)，且引入

$$m'_x = \bar{\rho} u', m'_y = \bar{\rho} v', m'_z = \bar{\rho} w'$$

则线性化的方程组为

$$\begin{cases} \partial m'_x/\partial t - f m'_y = -\partial p'/\partial x \\ \partial m'_y/\partial t + f m'_x = -\partial p'/\partial y \\ \partial m''_z/\partial t = -\partial p'/\partial z - g\rho' \\ \partial \rho'/\partial t + \partial m'_x/\partial x + \partial m'_y/\partial y + \partial m'_z/\partial z = 0 \\ \rho'/\bar{\rho} = p'/\bar{p} - T'/\bar{T} \\ \partial p'/\partial t + c_L^2 N^2/g \cdot m'_z = c_L^2 \, \partial \rho'/\partial t \end{cases} \tag{6}$$

其中 $N = \sqrt{g\,\partial \ln \bar{\theta}/\partial z}$（$\bar{\theta}$ 为位温的基本状态）是 Brunt-Väisälä 频率，$c_L = \sqrt{\gamma R \bar{T}}$ 是 Laplace 声速。

视 $g, N, c_L$ 为常数，(6)可化为

$$\mathscr{L} m'_y = 0 \tag{7}$$

其中

$$\mathscr{L} \equiv (\partial^2/\partial t^2 + N^2)(\partial/\partial t\ \nabla^2 + \beta\,\partial/\partial x) + (\partial^2/\partial t^2 + f^2)\partial/\partial t(\partial^2/\partial z^2 + \sigma\,\partial/\partial z - 1/c_L^2\,\partial^2/\partial t^2) \tag{8}$$

这里 $\nabla^2$ 为水平 Laplace 算子，$\beta$ 为 Rossby 参数，$\sigma = N^2/g + g/c_L^2$。

(7) 即是我们讨论整个大气线性波动的偏微分方程。

## 2. 中高纬度的大气波动

设(8)有下列形式的单波解

$$m'_y = A e^{-1/2\sigma \cdot z} \exp i\{(k_1 x + k_2 y + k_3 z) - \omega t\} \tag{9}$$

$A$ 为振幅，$\omega$ 为圆频率，$k_1, k_2, k_3$ 分别是 $x, y, z$ 方向上的波数。

(9) 代入(7)得到 $\omega$ 的下列五次代数方程

$$\omega^5 - \omega_A^2 \omega^3 + \omega_s^2 \omega_R \omega^2 + \omega_B^4 \omega - \omega_C^4 \omega_R = 0 \tag{10}$$

其中

$$\begin{cases} \omega_A^2 = (k^2 + m^2) c_L^2 + f^2, \quad \omega_B^4 = (k^2 N^2 + m^2 f^2) c_L^2 \\ \omega_C^4 = k^2 N^2 c_L^2, \quad \omega_s^2 = k^2 c_L^2, \quad \omega_R = -\beta k_1/k^2 \end{cases} \tag{11}$$

而

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2, m^2 = k_3^2 + (1/2\,\sigma)^2 \tag{12}$$

显然 $\omega_s$ 表征水平声波的频率，$\omega_R$ 表征 Rossby 波的频率。

准确地求解(10)几乎是不可能的，我们近似地求出它的五个根：

1. 中高频波

(10) 左端包含 $\omega_R$ 的两项可忽略，则(10)退化为下列准二次方程

$$\omega^4 - \omega_A^2 \omega^2 + \omega_B^4 = 0 \tag{13}$$

它的解为

$$\begin{cases} \omega_{1,2}^2 = \dfrac{\omega_A^2}{2}\left\{1+\sqrt{1-4\left(\dfrac{\omega_B}{\omega_A}\right)^4}\right\} \\ \omega_{3,4}^2 = \dfrac{\omega_A^2}{2}\left\{1-\sqrt{1-4\left(\dfrac{\omega_B}{\omega_A}\right)^4}\right\} \end{cases} \tag{14}$$

显然，$\omega_{1,2}$表征惯性-声波的频率，$\omega_{3,4}$表征的是惯性-重力内波的频率。

2．低频波

(10) 左端仅保留最后两项，则(10)的第五个根是

$$\omega_5 = \delta^2 \omega_R \tag{15}$$

其中

$$\delta^2 = (\omega_c/\omega_B)^4 = k^2N^2/(k^2N^2+m^2f^2) < 1 \tag{16}$$

当 $m^2f^2 \ll k^2N^2$ 时，$\delta^2 \approx 1$，$\omega_5 \approx \omega_R$，这就是 Rossby 波；而当 $k^2N^2 \ll m^2f^2$ 时，$\delta^2 \approx k^2N^2/m^2f^2$，$\omega_s \approx \dfrac{k^2N^2}{m^2f^2}\omega_R$，这就是超长波。

## 3．低纬度的大气波动

在低纬，$f \approx \beta y$，这样，方程(7)是变系数的，此时设波动解为

$$m_y' = A(y)e^{-1/2\sigma \cdot z}\exp i(k_1x+k_2z-\omega t) \tag{17}$$

代入到(7)得

$$d^2A/dy^2 + (-\beta k_1/\omega + \omega^2/\alpha^2c_L^2 - k_1^2 - \beta^2y^2/\alpha^2c_L^2)A = 0 \tag{18}$$

其中

$$\alpha^2 = (N^2-\omega^2)/(m^2c_L^2-\omega^2) \tag{19}$$

作下列变换

$$y = \sqrt{\alpha c_L/\beta}\ \eta, \omega = \sqrt{\beta\alpha c_L}\ \nu, k_1 = \sqrt{\beta/\alpha c_L}\ l \tag{20}$$

则(18)化为无量纲形式

$$d^2A/d\eta^2 + (-l/\nu+\nu^2-l^2-\eta^2)A = 0, \tag{21}$$

这是 Weber 方程。再令

$$A = e^{-1/2\cdot h^2}B \tag{22}$$

则(21)化为 Hermit 方程

$$d^2B/d\eta^2 - 2\eta\, dB/d\eta + (-l/\nu+\nu^2-l^2-1)B = 0 \tag{23}$$

要求 $A$ 或 $B$ 对所有 $\eta$ 有界，定得本征值为

$$-l/\nu+\nu^2-l^2-1 = 2n, (n=0,1,2,\cdots) \tag{24}$$

而本征函数为

$$\begin{cases} B = H_n(\eta) = H_n(\sqrt{\beta/\alpha c_L}y) \\ A = e^{-1/2\eta^2}H_n(\eta) = e^{-1/2\cdot\beta/\alpha c_L\cdot y^2}H_n(\sqrt{\beta/\alpha c_L}y) \end{cases} \tag{25}$$

这里 $H_n(\eta)(n=0,1,2,\cdots)$是 Hermit 多项式。

下面分 $n=0$ 和 $n\geq 1$ 两种情形讨论：

1．$n=0$

此时，(24)化为

$$(\nu+l)(\nu^2-l\nu-1)=0 \tag{26}$$

要满足上式，下列二者之一必须成立：

(1) $\nu=-l$

以(20)代入，并使 $l,\nu$ 分别换回 $k_1,\omega$ 得

$$\omega^2=\alpha^2k_1^2c_L^2 \tag{27}$$

将(19)代入，则得

$$\omega^4-(k_1^2+m^2)c_L^2\omega^2+k_1^2N^2c_L^2=0 \tag{28}$$

这就是(13)中 $k^2=k_1^2,(k_2=0),f=0$ 的特例。因此，$n=0$ 的情况说明低纬度大气包含声波和重力内波。它们的频率分别是

$$\begin{cases} \omega_{1,2}^2=\dfrac{\omega_{A_1}^2}{2}\left\{1+\sqrt{1-4\left(\dfrac{\omega_{B_1}}{\omega_{A_1}}\right)^4}\right\} \\ \omega_{3,4}^2=\dfrac{\omega_{A_1}^2}{2}\left\{1-\sqrt{1-4\left(\dfrac{\omega_{B_1}}{\omega_{A_1}}\right)^4}\right\} \end{cases} \tag{29}$$

其中

$$\omega_{A_1}^2=(k_1^2+m^2)c_L^2,\omega_{B_1}^4=k_1^2N^2c_L^2 \tag{30}$$

(2) $\nu^2-l\nu-1=0$

以(20)代入，并使 $l,\nu$ 分别换回 $k_1,\omega$ 得

$$\omega^2-\alpha k_1c_L\omega-\alpha\beta c_L=0 \tag{31}$$

它形式上是 $\omega$ 的二次代数方程，但注意(19)则不然。我们仍近似求解(31)。

对于中高频波，忽略(31)左端最后一项，得

$$\omega=\alpha k_1c_L \tag{32}$$

它就是(27)。

对于低频波，保留(31)左端后两项，得

$$\omega_5=-\beta/k_1 \tag{33}$$

这是沿 $x$ 方向传播的 Rossby 波。

2．$n\geqslant1$

此时，我们近似求解(24)，注意(19)近似有

$$\alpha=\begin{cases}1, & \omega\gg\max(N,mc_L) \\ N/mc_L & \omega\ll\min(N,mc_L)\end{cases} \tag{34}$$

(1) 高频波

此时，(24)左端第一项可忽略，得

$$\nu^2=l^2+2n+1 \tag{35}$$

以(20)代入，并取 $\alpha=1$，则有

$$\omega_{1,2}^2=k_1^2c_L^2+(2n+1)\beta c_L \tag{36}$$

它显然表征含 $\beta$ 影响的声波

(2) 中频波

仍然用(35)，但取 $\alpha=N/mc_L$，则有

$$\omega_{3,4}^2=R_1^2/m^2\cdot N^2+(2n+1)=\beta/m\cdot N \tag{37}$$

它即是含 $\beta$ 影响的重力内波。

(3) 低频波

此时，(24)左端第二项可忽略，得

$$\nu=-l/(l^2+2n+1) \tag{38}$$

以(20)代入，并取 $\alpha=N/mc_L$，则有

$$\omega_5=-\beta k_1\Big/\left[k_1^2+\frac{\beta m}{N}(2n+1)\right] \tag{39}$$

它表征低纬 Rossby 波，即东风波。

## 参 考 文 献


[1] Thompson, P. D., "Numerical Weather analysis and prediction", 1961, New York, Macmillan.

[2] Matsuno, T., Quasi-geostrophic motions in the equatorical area, *J. Meteor. Soc.* Japan, **44** (1966), 25—43.

[3] Lindzen, R. S., Planetary waves on beta planes, *Mon. Wea. Rev.*, **95** (1967), 441—451.

[4] 田中浩，内部重力波の理论，気象研究ノート **126** 号 (1975), 245—290.

[5] 曾庆存，《数值天气预报的数学物理基础》，第一卷，科学出版社，1979。