第46卷 第2期 气象学报 Vol. 46, No. 2
1988年5月 ACTA METEOROLOGICA SINICA May, 1988

移动性热源与上游效应*

赵瑞星

(总参气象局)

提　　要

本文讨论了移动性热源引起的上游效应，即研究跟随波动一起移动的非绝热加热区对其下游波动的作用。

一、引　　言

上游效应是四十年代叶笃正等人[1]分析固定涡源对正压无辐散大气中波动的作用得出的。文献[2]将其又推广到移动性涡源的情况。文献[3]讨论了非绝热加热对行星尺度波动的激发，但是都没有考虑移动性热源的情况。

本文试图在上述讨论的基础上，考虑移动性热源的作用。这可比拟于在西风带中，移动性槽中有一跟随槽一起移动的云雨区，云区中的上升运动把水汽带到上空凝结释放潜热加热大气，这种加热对其下游槽的影响。同时还讨论了涡源和热源产生的上游效应的迭加情况。为了便于数学处理本文仍用一维涡度方程。

二、基本方程及其解

考虑非绝热加热的一维涡度方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}+\bar{u}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta v+D\frac{\partial v}{\partial x}=-S^2 Q \tag{1}$$

此式为文献[3]所用的方程。其中 D 为摩擦系数，Q 为非绝热加热，S^2 取为常数。

采用移动性坐标系，则上式相应的初边值条件为

$$t=0,\ v=0$$

$$t>0,\ x=g(t),\ v=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\zeta_0 e^{i\omega t}$$

其中 $g(t)$ 为位移函数。

为了处理方便，先作坐标变换，改用跟随涡源的坐标系 (X,T)

$$\begin{cases}X=x-g(t)\\ T=t\ \text{（为了书写方便}T\text{仍记为}t\text{）}\end{cases}$$

* 本文于1986年4月23日收到，1986年12月12日收到修改稿。

原方程变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t\partial X}+\bar{u}\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial X^2}+\beta v+D\dfrac{\partial v}{\partial X}=-S^2Q \\ t=0,\ \ v=0 \\ t>0,\ \ X=0,\ v=0,\ \ \dfrac{\partial v}{\partial X}=\zeta_0 e^{i\omega t}\end{cases} \tag{2}$$

假定加热函数 Q 在(X,t)坐标系中可分离,即可设　$Q=Q_1(t)Q_2(X)$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t\partial X}+\bar{u}\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial X^2}+\beta v+D\dfrac{\partial v}{\partial X}=-S^2Q_1(t)Q_2(X) \\ t=0,\ \ v=0 \\ t>0,\ \ X=0,\ v=0,\ \ \dfrac{\partial v}{\partial X}=\zeta_0 e^{i\omega t}\end{cases} \tag{3}$$

对方程(3)作 laplace 变换

$$\tilde{v}(P,\ t)=\int_0^\infty v(X,\ t)e^{-PX}dX$$

得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial t}+P\bar{u}\,\tilde{v}+\dfrac{\beta}{P}\tilde{v}+D\,\tilde{v}=-\dfrac{S^2}{P}Q_1(t)\tilde{Q}_2+\dfrac{\bar{u}\zeta_0}{P}e^{i\omega t} \\ t=0,\ \ \tilde{v}=0\end{cases} \tag{4}$$

解方程(4)得

$$\tilde{v}(P,\ t)=-\frac{S^2\tilde{Q}_2}{P}\int_0^t Q_1(t')\exp[(P\bar{u}+D+\frac{\beta}{P})(t'-t)]dt'$$
$$+\frac{\bar{u}\zeta_0}{P}\int_0^{+}e^{i\omega t'}\exp[(P\bar{u}+D+\frac{\beta}{p})(t'-t)]dt' \tag{5}$$

利用反演公式

$$v(X,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tilde{v}(P,\ t)e^{PX}dP$$

对(5)式进行反演运算,得

$$v(X,\ t)=-S^2\int_0^X Q_2(X')\int_0^t\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}Q_1(t')e^{D(t'-t)}$$
$$\frac{e^{-\frac{\beta}{P}(t-t')}}{P}\exp[P(X-X')-P\bar{u}(t-t')]dP\,dt'dX'$$
$$+\bar{u}\zeta_0\int_0^t e^{i\omega t'}e^{D(t'-t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{\frac{\beta}{P}(t-t')}}{P}$$
$$\exp[PX-P\bar{u}(t-t')]dP\,dt' \tag{6}$$

上式中已用了卷积定理

$$\mathscr{L}^{-1}\{\mathscr{L}[f_1(t)]\mathscr{L}[f_2(t)]\}=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

位移定理和延迟定理。

由 laplace 反演变换表，可得

$$v(X,t)=-S^2\int_0^X Q_2(X')\int_0^t Q_1(t')e^{D(t'-t)}$$
$$J_0(2\sqrt{[X-X'-\bar{u}(t-t')]\beta(t-t')})\theta_1(X-X'-\bar{u}(t-t'))dt'dX'$$
$$+\bar{u}\zeta_0\int_0^t e^{i\omega t'}e^{D(t'-t)}J_0(2\sqrt{[X-\bar{u}(t-t')]\beta(t-t')})$$
$$\theta_2(X-\bar{u}(t-t'))dt' \quad (7)$$

其中 θ_1，θ_2 均为单位函数

$$\theta_1\begin{cases}=0, & X-X'-\bar{u}(t-t')\leqslant 0\\ =1, & X-X'-\bar{u}(t-t')>0\end{cases}$$
$$\theta_2\begin{cases}=0, & X-\bar{u}(t-t')\leqslant 0\\ =1, & X-\bar{u}(t-t')>0\end{cases}$$

令 $v(X,t)=v_1(X,t)+v_2(X,t)$

$$v_1(X,t)=-S^2\int_0^X Q_2(X')\int_0^t Q_1(t')e^{D(t'-t)}$$
$$J_0(2\sqrt{[X-X'-\bar{u}(t-t')]\beta(t-t')})\theta_1(X-X'-\bar{u}(t-t'))dt'dX' \quad (8)$$

$$v_2(X,t)=\bar{u}\zeta_0\int_0^t e^{i\omega t'}e^{D(t'-t)}J_0(2\sqrt{[X-\bar{u}(t-t')]\beta(t-t')})$$
$$\theta_2[X-\bar{u}(t-t')]dt' \quad (9)$$

$v_1(X,t)$为热源激发的扰动，$v_2(X,t)$为涡源激发的扰动。

文献[2]中已较详细地讨论过 $v_2(X,t)$，文献[3]中已讨论过 $v_1(X,t)$ 中的某些情况，在此我们讨论 $Q_2(X)$影响的扰动 $v_1(X,t)$，及 $v_1(X,t)$和涡源激发的扰动 $v_2(X,t)$迭加的种种情况。

三、非绝热加热的分布特征及其范围对其激发的扰动的影响

为了讨论方便，假定 $Q_1(t)=Q_1=$常数（定常加热），且不考虑摩擦的影响，即 $D=0$，那么

$$v_1(X,t)=-S^2Q_1\int_0^X Q_2(X')\int_0^t J_0(2\sqrt{\beta(t-t')[X-X'-\bar{u}(t-t')]})$$
$$\theta_1[X-X'-\bar{u}(t-t')]dt'dX' \quad (10)$$

现在我们先讨论(10)的格林函数 $G_1(X,X',t)$

$$G_1(X,X',t)=-S^2Q_1\int_0^t J(2\sqrt{\beta(t-t')[X-X'-\bar{u}(t-t')]})$$
$$\theta_1[X-X'-\bar{u}(t-t')]dt'$$

仅考虑西风带 $\bar{u}>0$，由于 $t>t'$，所以 $\bar{u}(t-t')>0$，因此对于 θ_1 的取值有如下几种情况：

1) $X-X'<0$，相当相对于点热源上游的点，有$[X-X'-\bar{u}(t-t')]<0$，按 θ_1 的定义$\theta_1=0$

2) $0\leqslant(X-X')<\bar{u}t$，即相对点热源而言为下游的点 X 总存在一个 $t'=t_1=t-\frac{X-X'}{\bar{u}}$，使得 $X-X'-\bar{u}(t-t')=0$。当 $t'\leqslant t_1$ 时，$\theta_1=0$，当 $t'>t_1$ 时，$\theta_1=1$。

3) 当 $X-X'>\bar{u}t$ 时，$X-X'>\bar{u}(t-t')$ 总成立，按 θ_1 的定义 $\theta_1\neq 0,\theta_1=1$。

因此，在西风带(10)式的格林函数变为

$$G_1(X,X',t)\begin{cases}=0, & X-X'<0;\\ =-S^2Q_1\int_{t-\frac{X-X'}{\bar{u}}}^{t}J_0\left(2\sqrt{\beta(t-t')[X-X'-\bar{u}(t-t')]}\right)dt & 0\leqslant X-X'\leqslant\bar{u}t;\\ =-S^2Q_1\int_0^t J_0\left(2\sqrt{\beta(t-t')[X-X'-\bar{u}(t-t')]}\right)dt', & X-X'>\bar{u}t\end{cases}\tag{11}$$

令 $\tau=t-t'$，并利用积分公式[1]

$$\int_0^\alpha J_0(\sqrt{\alpha^2-\xi^2})d\xi=\sin\alpha$$

(11)式化为

$$G_1(X,X',t)\begin{cases}=0, & X-X'<0;\\ =-S^2Q_1\sin\sqrt{\frac{\beta}{\bar{u}}}(X-X')/\sqrt{\beta\bar{u}}, & 0\leqslant X-X'\leqslant\bar{u}t;\\ =-S^2Q_1\int_0^t J_0(2\sqrt{\beta\tau(X-X'-\bar{u}\tau)})\,d\tau, & X-X'>\bar{u}t.\end{cases}\tag{12}$$

由于(12)式的第三个积分式当 $t\to\infty$ 时趋于第二个积分，所以我们只讨论第二个积分式足以说明问题。

假定

$$Q_2(X')\begin{cases}=Q_2(X')(\neq 0), & 0\leqslant X'\leqslant H;\\ =0, & \text{其它。}\end{cases}$$

那么，把(12)式代入(10)式，可得

$$v_1(X,t)\begin{cases}=0, & X<0;\\ =-S^2Q_1\int_0^X Q_2(X')\sin\sqrt{\frac{\beta}{\bar{u}}}(X-X')dX'/\sqrt{\beta\bar{u}}, & 0\leqslant X\leqslant H;\\ =-S^2Q_1\int_0^H Q_2(X')\sin\sqrt{\frac{\beta}{\bar{u}}}(X-X')dX'/\sqrt{\beta\bar{u}}, & H\leqslant X\leqslant\bar{u}t+H;\\ =-S^2Q_1\int_0^H Q_2(X')\int_0^t J_0(2\sqrt{\beta\tau(X-X'-\bar{u}\tau)})d\tau dX', & X>\bar{u}t+H.\end{cases}\tag{13}$$

(此处已假定有足够的时间使 $\bar{u}t>H$)。

由(13)式可以看出，非绝热加热激发的扰动分为四个部分。

a. 加热区上游无扰动产生。

b. 加热区内，扰动为

$$I(X) = -S^2Q_1\int_0^X Q_2(X')\sin\sqrt{\frac{\beta}{\bar{u}}}(X-X')dX'/\sqrt{\beta\bar{u}} \tag{14}$$

显然，(14)式是由 $Q_2(X')$ 的分布特征决定的。$Q_2(X')$ 的分布特征不同(14)式的解也不同。例如 $Q_2(X')=Q_2=$常数时，

$$I_1(X) = -S^2Q_1\int_0^X Q_2(X')\sin\sqrt{\frac{\beta}{\bar{u}}}(X-X')dX'/\sqrt{\beta\bar{u}}$$

$$= -\frac{S^2Q_1Q_2}{\beta}\int_0^X \sin k(X-X')kdX'$$

$$= \frac{S^2Q_1Q_2}{\beta}(\cos kX-1)$$

其中，$k=\sqrt{\frac{\beta}{\bar{u}}}$

当 $Q_2(X')=aX'$ 时(a 为常数)

$$I_1(X) = -\frac{S^2Q_1}{\beta}aX - \frac{S^2Q_1}{\beta k}a\sin kX$$

c. 加热区下游(加热区外)，扰动为两部分：① $t \geqslant (X-H)/\bar{u}$ 时，

$$I_2(X) = -S^2Q_1\int_0^H Q_2(X')\sin k(X-X')dX'/\sqrt{\beta\bar{u}} \tag{15}$$

② $t<(X-H)/\bar{u}$，

$$J_2(X,t) = -S^2Q_1\int_0^H Q_2(X')\int_0^t J_0(2\sqrt{\beta\tau(X-X'-\bar{u}\tau)})d\tau dX' \tag{16}$$

且有 $\lim\limits_{t\to\infty} J_2(X,t) = J_2(X,\infty) = I_2(X)$

由此可知，在加热区下游，当 $t\geqslant(X-H)/\bar{u}$ 时，热源激发的扰动是与 $Q_2(X)$ 分布有关的周期性定常波动，$t<(X-H)/\bar{u}$ 时，其扰动是非定常的，当 $t\to\infty$ 时，在加热区下游全区将建立与 $Q_2(X)$ 有关的定常波动。但值得注意的是当 $Q_2(X)=Q_2=$常数时，为使波动不为零(当然零值仍是满足周期性的)，$H\neq nL\left(L=\frac{2\pi}{k}, n=1,2\cdots\right)$ 是必须要求的。

四、热源，涡源共同作用产生的扰动

仍取 $Q_1(t)=Q_1=$常数，$D=0$ 的假定，且为了讨论方便不考虑涡源的强度变化，即令 $\omega=0$，同时令 $Q_2(X')=Q_2=$常数($0\leqslant X'\leqslant H$)。在此假定下，由(13)、(9)式得$\left(\text{令 } H=\frac{L}{2}\right)$

$$v_1(X,t)\begin{cases}=0, & X<0;\\ =\dfrac{S^2Q_1Q_2}{\beta}(\cos kX-1), & 0\leqslant X<\dfrac{L}{2};\\ =2\dfrac{S^2Q_1Q_2}{\beta}\cos kX, & \dfrac{L}{2}\leqslant X<\bar{u}t+\dfrac{L}{2};\\ =-S^2Q_1Q_2\displaystyle\int_0^{L/2}\int_0^t J_0\left(2\sqrt{\beta\tau(X-X'-\bar{u}\tau)}\right)d\tau dX', & \\ \qquad X\geqslant\bar{u}t+\dfrac{L}{2}. \end{cases} \tag{17}$$

$$v_2(X,t)\begin{cases}=0, & X<0;\\ =\bar{u}\zeta_0\displaystyle\int_0^{X/\bar{u}}J_0\left(2\sqrt{\beta\tau(X-\bar{u}\tau)}\right)d\tau, & 0\leqslant X\leqslant\bar{u}t;\\ =\bar{u}\zeta_0\displaystyle\int_0^t J_0\left(2\sqrt{\beta\tau(X-\bar{u}\tau)}\right)d\tau, & X>\bar{u}t.\end{cases}$$

即

$$v_2(X,t)\begin{cases}=0, & X<0;\\ =\dfrac{\zeta_0}{k}\sin kX, & 0\leqslant X\leqslant\bar{u}t;\\ =\bar{u}\zeta_0\displaystyle\int_0^t J_0\left(2\sqrt{\beta\tau(X-\bar{u}\tau)}\right)d\tau, & X>\bar{u}t.\end{cases} \tag{18}$$

$$v(X,t)=v_1(X,t)+v_2(X,t)$$

$$v(X,t)\begin{cases}=0, & X<0;\\ =\dfrac{\zeta_0}{k}\sin kX+\dfrac{S^2Q_1Q_2}{\beta}(\cos kX-1), & 0\leqslant X<\dfrac{L}{2};\\ =\dfrac{\zeta_0}{k}\sin kX+\dfrac{2S^2Q_1Q_2}{\beta}\cos kX, & \dfrac{L}{2}\leqslant X<\bar{u}t;\\ =\bar{u}\zeta_0\displaystyle\int_0^t J_0\left(2\sqrt{\beta\tau(X-\bar{u}\tau)}\right)d\tau+\dfrac{2S^2Q_1Q_2}{\beta}\cos kX, & \\ \qquad \bar{u}t\leqslant X<\bar{u}t+L/2; & \\ =\bar{u}\zeta_0\displaystyle\int_0^t J_0\left(2\sqrt{\beta\tau(X-\bar{u}\tau)}\right)d\tau-S^2Q_1Q_2\int_0^t\int_0^{L/2}J_0\left(2\sqrt{\beta\tau(X-X'-\bar{u}\tau)}\right) & \\ \qquad dX'd\tau, \quad X\geqslant\bar{u}t+\dfrac{L}{2}. \end{cases} \tag{19}$$

$\left(\text{此处已假定 } t \text{ 足够大,使得} \bar{u}t>\dfrac{L}{2}\text{满足}\right)$。

可见,对于热源和涡源共同作用产生的扰动,在 $X<\bar{u}t$ 的区域仍是定常的波动;只是加热区内和加热区外有所区别。

加热区内波动为

$$-\frac{S^2Q_1Q_2}{\beta}+\sqrt{\frac{\zeta_0^2}{k^2}+S^4\frac{Q_1^2Q_2^2}{\beta^2}}\sin(kX+\alpha_1)$$

其中 $\alpha_1=\text{tg}^{-1}\left(\dfrac{S^2Q_1Q_2}{\beta}\Big/\dfrac{\zeta_0}{k}\right)$。

加热区外下游波动为

$$\sqrt{\frac{\zeta_0^2}{k^2}+\frac{4\,S^4Q_1^2Q_2^2}{\beta^2}}\sin(kX+\alpha_2)$$

其中 $\alpha_2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2\,S^2Q_1Q_2}{\beta}\Big/\frac{\zeta_0}{k}\right)$。

在 $X\geqslant\bar{u}t$ 的区域，仍为非定常扰动。

与上述类似，我们可以讨论非定常加热和变强度涡源的情况。

五、结　　论

1. 同移动性涡源类似，移动性热源也能激发出下游扰动，产生上游效应。在定常加热情况下，非绝热加热激发的扰动和加热区的范围，加热函数的水平分布特征有关。

2. 上游效应是热源和涡源共同作用的结果。

参 考 文 献

[1] Yet, T. C., On the energy dispersion in the atmosphere, *J. Met.*, **6**, 1—6, 1949.
[2] 徐银梓等，移动性涡源与Rossby波，气象学报，43. 2, 137—143, 1985。
[3] 吕克利，非绝热加热与行星尺度波动的激发，气象学报，43. 2, 129—136, 1985。

MOVABLE HEAT SOURCE AND THE EFFECT OF THE UPPER COURSE

Zhao Ruixing

(Meteorological Bureau, Headquarters of the General staff)

Abstract

In this paper, the effect of upper course was discussed that is excited by diabatic heating region moving with wave.