第46卷 第2期　　气 象 学 报　　Vol. 46, No. 2
1988 年 5 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　May, 1988

地转动量假定下风场近似与扰动的稳定性*

伍荣生　王　辉

（南京大学大气科学系）

在大尺度系统中，由于Rossby数很小，大气呈准地转运动。但在低纬度地区或中小尺度系统中，Rossby数不是小参数，运动的非地转特征就很明显了。为了避免非线性问题中数学处理的复杂性，可以使用半地转近似，这不但可以使问题得到线性化，而且其结果又有非线性的主要特征。本文在半地转假定下，当风压场处于平衡状态时，我们得到了一种简单的表示式，并将它与Rossby近似和Phillips近似进行了比较。文中还对扰动的稳定性进行了研究，在某些条件下，例如风场发生扰动而气压场未受扰时，半地转平衡风场的稳定性与经典的惯性稳定性是相似的；在一般情况下，可得出另一些结论。

1. 基本方程与平衡风场

在地转动量近似下[1]，运动方程可写成：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_g}{\partial t}+u\dfrac{\partial u_g}{\partial x}+v\dfrac{\partial u_g}{\partial y}-fv=-fv_g\\[2mm]\dfrac{\partial v_g}{\partial t}+u\dfrac{\partial v_g}{\partial x}+v\dfrac{\partial v_g}{\partial y}+fu=fu_g\end{cases}\tag{1}$$

其中 u_g,v_g 为地转风在 x,y 方向的分量：

$$u_g=-\frac{1}{f}\frac{\partial\phi}{\partial y},\qquad v_g=\frac{1}{f}\frac{\partial\phi}{\partial x}\tag{2}$$

ϕ 为重力位势高度，其余符号同惯常意义。

在(1)式中，将$\dfrac{\partial u_g}{\partial t}$、$\dfrac{\partial v_g}{\partial t}$分别用$\dfrac{\partial u}{\partial t}$、$\dfrac{\partial v}{\partial t}$来代替，这就充分考虑到非地转成分局地变化的贡献，这对于有较大变化与发展的系统是起重要作用的，此时，(1)式可写成：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+a_1u+b_1v=c_1\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial t}+a_2u+b_2v=c_2\end{cases}\tag{3}$$

式中各符号意义如下：

$$\begin{cases}a_1=\dfrac{\partial u_g}{\partial x}, & b_1=\dfrac{\partial u_g}{\partial y}-f, & c_1=-fv_g=-\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\\[2mm]a_2=\dfrac{\partial v_g}{\partial x}+f, & b_2=\dfrac{\partial v_g}{\partial y}, & c_2=fu_g=-\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\end{cases}\tag{4}$$

在平衡状态时，$\dfrac{\partial}{\partial t}=0$，则从(3)式可解得：

$$u_s=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad v_s=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1}\tag{5}$$

或者利用(4)式可得：

---

* 本文于1986年5月26日收到，1987年5月25日收到最后修改稿。

$$u_s=-\frac{1}{fJ}\frac{\partial}{\partial y}(K_g+\phi),\qquad v_s=\frac{1}{fJ}\frac{\partial}{\partial x}(K_g+\phi) \tag{6}$$

其中

$$fJ=f+\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)+\frac{1}{f}\left(\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial y}-\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial y}\right) \tag{7}$$

$$K_g=\frac{1}{2}(u_g^2+v_g^2) \tag{8}$$

事实上，Hoskins[1]曾指出，fJ 为地转动量近似下绝对涡度的铅直分量，下面用 ζ_{gm} 来代替。

Rossby 曾将运动方程写成[2]：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\eta v=-\frac{\partial E}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+\eta u=-\frac{\partial E}{\partial y} \tag{9}$$

其中：

$$\eta=f+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),\qquad E=\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\phi \tag{10}$$

利用(9)式，可求得平衡时的风场为：

$$u=-\frac{1}{\eta}\frac{\partial E}{\partial y},\qquad v=\frac{1}{\eta}\frac{\partial E}{\partial x} \tag{11}$$

若将上式右端用 u_g, v_g 来代替，则近似有：

$$u_R=-\frac{1}{\eta_g}\frac{\partial}{\partial y}(K_g+\phi),\qquad v_R=\frac{1}{\eta_g}\frac{\partial}{\partial x}(K_g+\phi) \tag{12}$$

上式通常称为 Rossby 近似[2]。在[2]中，还曾给出 Phillips 近似，在定常情况下，它为：

$$\begin{cases}u_p=-\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial}{\partial y}(K_g+\phi)-u_g\zeta_g\dfrac{1}{f}\\[2ex] v_p=\dfrac{1}{f}\dfrac{\partial}{\partial x}(K_g+\phi)-v_g\zeta_g\dfrac{1}{f}\end{cases} \tag{13}$$

下面分析半地转近似与 Rossby 近似、Phillips 近似的关系。因为

$$u_R=-\frac{1}{\eta_g}\frac{\partial}{\partial y}(K_g+\phi)=-\frac{1}{f\left(1+\dfrac{\zeta_g}{f}\right)}\frac{\partial}{\partial y}(K_g+\phi) \tag{14}$$

在$\dfrac{\zeta_g}{f}\ll 1$ 时，上式还可近似写成：

$$u_R\approx-\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}(K_g+\phi)+\frac{\zeta_g}{f^2}\frac{\partial}{\partial y}(K_g+\phi)+\cdots \tag{15}$$

将上式中$\dfrac{\partial K_g}{\partial y}$略去，即可得到：

$$u_R\approx-\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}(K_g+\phi)-\frac{1}{f}\zeta_g u_g=u_p \tag{16}$$

由此可见，Phillips 近似是 Rossby 近似的一种近似表示式，在 $\dfrac{\zeta_g}{f}\ll 1$，即 $R_0\ll 1$ 时，二者是很接近的。当然，在 R_0 不是小参数时，u_R 与 u_p 就有较大的差异，而 u_R 比 u_p 精确。

另一方面，比较(6)式与(12)式，可以发现二个表示式是很相似的，差别仅在于等式右侧分母上，一个是 η_g，一个是 ζ_{gm}，为了清楚地了解二者的差异，利用(7)式与(10)式，可求得：

$$\zeta_{gm}=\eta_g+\Delta \tag{17}$$

$$\frac{\Delta}{f}=\frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial y}-\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial y}\right) \tag{18}$$

如令

$$(u_g,\ v_g)=V(u_g',\ v_g'),\qquad (x,\ y)=L(x',\ y') \tag{19}$$

则有无因次表示式：

$$\frac{\Delta}{f}=R_0^2\left(\frac{\partial u_g'}{\partial x'}\frac{\partial v_g'}{\partial y'}-\frac{\partial v_g'}{\partial x'}\frac{\partial u_g'}{\partial y'}\right) \tag{20}$$

其中 $R_0=\dfrac{V}{fL}$，为 Rossby 数。在大尺度运动中，$R_0\ll1$，因此，η_g 与 ζ_{gm} 之差很小，这表示这二种平衡风场是很相近的；如果 R_0 不是小参数，即对于中尺度系统或低纬地区，二者之差就很显著了。此外，从处理结果上看，Rossby 近似只是迭代过程中的第一近似表示式，它不如半地转风场近似有较清楚的物理背景。

我们曾利用一个理想风场分布，求出各种近似风场的精度，结果表明在较小尺度的系统中，远离涡旋中心地区，半地转风场近似具有较高精度。为了节省篇幅，在此就不再给出计算结果。

2. 扰动的稳定性

如在平衡风场附近发生小扰动，即：

$$u=u_s+u',\qquad v=v_s+v',\qquad \phi=\phi_s+\phi' \tag{21}$$

如此，有：

$$a_i=a_{is}+a_i',\qquad b_i=b_{is}+b_i',\qquad c_i=c_{is}+c_i',\qquad i=1,2 \tag{22}$$

式中带下标 s 的量同(4)式，但用 u_{gs}，v_{gs} 来代替 u_g，v_g，带撇号的量为

$$\begin{cases} a_1'=\dfrac{\partial u_g'}{\partial x}, & b_1'=\dfrac{\partial u_g'}{\partial y}, & c_1'=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial x}, \\ a_2'=\dfrac{\partial v_g'}{\partial x}, & b_2'=\dfrac{\partial v_g'}{\partial y}, & c_2'=-\dfrac{\partial \phi'}{\partial y} \end{cases} \tag{23}$$

将(21)式代入(3)式，线性化后可得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial t}+a_{1s}u'+b_{1s}v'+a_1'u_s+b_1'v_s=c_1' \\ \dfrac{\partial v'}{\partial t}+a_{2s}u'+b_{2s}v'+a_2'u_s+b_2'v_s=c_2' \end{cases} \tag{24}$$

现在可利用(24)式来讨论扰动的稳定性。下面分两种情况来讨论。

1）气压场不发生扰动　在平衡风场附近，风场发生扰动而气压场仍维持不变，则有：

$$a_i'=b_i'=c_i'=0\qquad i=1,\ 2 \tag{25}$$

将此关系式代入(24)式，求得特征方程为：

$$\lambda^2-(a_{1s}+b_{2s})\lambda+(a_{1s}b_{2s}-a_{2s}b_{1s})=0 \tag{26}$$

考虑到

$$a_{1s}+b_{2s}=0 \tag{27}$$

所以当

$$a_{1s}b_{2s}-a_{2s}b_{1s}>0 \tag{28}$$

时，λ 为共轭纯虚根，故扰动是稳定的。如将 a_{is}，b_{is} 等表示式代入，则上述条件可写成：

$$f^2+f\left(\frac{\partial v_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial y}-\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial y}\right)>0 \tag{29}$$

或者，可写成：

$$f\zeta_{gm}>0 \tag{30}$$

否则，当

$$f\zeta_{gm}<0 \tag{31}$$

时，扰动是不稳定的。在 $\zeta_{gm}=0$ 时，扰动不随时间变化。

这一条件与经典惯性不稳定条件是相似的[3]，不过，在惯性稳定性条件中，是以绝对涡度代替上式中的 ζ_{gm}。

2) 无辐散运动 从(24)式，可求得能量方程为：

$$\frac{\partial E'}{\partial t}=(c_1'u'+c_2'v')-[a_{1s}u'^2+(b_{1s}+a_{2s})u'v'+b_{2s}v'^2]$$
$$-[(a_1'u'+a_2'v')u_s+(b_1'u'+b_2'v')v_s] \tag{32}$$

其中 E' 为扰动动能，即

$$E'=\frac{1}{2}(u'^2+v'^2) \tag{33}$$

可以利用扰动动能的增大或减小来判别扰动的发展与否。

在无辐散运动中，存在地转流函数 ψ'，

$$\psi'=\frac{1}{f}\phi' \tag{34}$$

它与风场的关系为：

$$u'=-\frac{\partial\psi'}{\partial y},\qquad v'=\frac{\partial\psi'}{\partial x} \tag{35}$$

在此条件下，可求得：

$$c_1'u'+c_2'v'=-\left(u'\frac{\partial\phi'}{\partial x}+v'\frac{\partial\phi'}{\partial y}\right)=-\nabla\cdot\boldsymbol{v}'\phi' \tag{36}$$

$$(a_1'u'+a_2'v')u_s+(b_1'u'+b_2'v')v_s$$
$$\approx\frac{\partial}{\partial x}(u_sK_s')+\frac{\partial}{\partial y}(v_sK_s')-K_s'\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s \tag{37}$$

其中 $K_s'=\frac{1}{2}(u_s'^2+v_s'^2)$，将(36)、(37)式代入(32)式，则有：

$$\frac{\partial E'}{\partial t}=-\nabla\cdot(\boldsymbol{v}'\phi'+K_s'\boldsymbol{v}_s)-[a_{1s}u'^2+(b_{1s}+a_{2s})u'v'$$
$$+b_{2s}v'^2]+K_s'\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s \tag{38}$$

将上式对整个区域积分，最后可得：

$$\frac{\partial\widetilde{E}'}{\partial t}=-\int_\sigma[a_{1s}u'^2+(b_{1s}+a_{2s})u'v'+b_{2s}v'^2]d\sigma$$
$$-\int_\sigma K_s'\boldsymbol{v}_s\cdot\nabla\ln\zeta_{gm}d\sigma \tag{39}$$

其中 $\widetilde{E}'$ 为整个区域的扰动动能。由上式可知，扰动稳定性取决于二项的总和，上式第一项为气压场无扰动条件下扰动动能的变化，而第二项就是由于气压场(无辐散条件)扰动所引起的变化。由于 K_s' 恒为正值，如果在地转扰动动能大的区域伴随着辐合或正的半地转涡度平流，而在地转扰动动能小的区域伴随着辐散或负的半地转涡度平流，则第二项总的结果为负，它使扰动动能减小，故起稳定作用，反之，则起不稳定作用。

在研究上述平衡风场附近扰动的稳定性可以看出，在气压场无扰动情况下，稳定性条件和惯性稳定性条件相似。而在气压场发生扰动，但满足无辐散条件时，则得到另一新的稳定性条件。

参 考 文 献

[1] Hoskins, B. J., The geostrophic momentum approximation and the semi-geostrophic equations, *J. A. S.*, **32**, 233-243, 1975.
[2] Hollmann, G., and H. Reuter, Uber die Genauigkeit verschiedener Approximation der horizontal Windkomponenter, *Tellus*, **5**, 403-412, 1953.
[3] Holton, J. R., An Introduction to Dynamic Meteorology, Academic Press, New York, 1979.

ACCURACY OF WIND APPROXIMATION AND STABILITY OF DISTURBANCE UNDER THE ASSUMPTION OF GEOSTROPHIC MOMENTUM

Wu Rongsheng Wang Hui

(*Department of Atmospheric Sciences, Nanjing Universiy*)

Abstract

In this paper, the accuracy of wind approximation of geostrophic momentum compared with others e.g. Rossby approximation and Phillips approximation is discussed. The stability of the disturbance under the assumption of geostrophic momentum is studied