第47卷 第2期 气 象 学 报 Vol. 47, No. 2
1989年5月 ACTA METEOROLOGICA SINICA May, 1989

局地势与涡度守恒原理*

伍荣生　　侯志明

（南京大学大气科学系）　　（空军气象学院）

提　　要

在本文中，利用运动方程在 β 平面条件下，求得了无辐散运动的局地势。从它推出了涡度守恒原理。也就是说，当局地势为最小时，运动是满足涡度守恒的。在文中，还对涡度方程的 Lagrange 函数、能量等问题作了简单的分析。

一、引　　言

Whitham 等人曾试图从涡度方程出发来寻求与涡度守恒方程相对应的变分问题，然后用平均的 Lagrange 方法来研究波动动力学性质。对于线性涡度方程，Whitham[1] 已求得了相应的 Lagrange 函数。而对于非线性涡度方程则未解决。伍荣生[2]曾利用 Finlayson[3] 所称之为限制性变分原理，求得了与非线性涡度方程相对应的 Lagrange 函数。但这种处理有较大的灵活性，从物理上看，它的原理还不十分清晰。在以前的工作基础上，我们放弃了从涡度方程出发寻求与其对应的变分问题的惯常途径，改用从运动方程出发，利用 Glansdoff和Prigogine[4]所提出的局地势的变分方法，寻得了与涡度方程相对应的变分问题。利用这一方法所得的结果，物理上较为清晰。本文是寻求与正压无辐散的涡度方程相对应的变分问题。除了讨论正压无辐散气流中涡度守恒特征之外，还分析了地形的作用，最后利用所求的局地势，对 Lagrange 函数的特性进行了物理意义的探讨。

二、正压无辐散气流中的局地势

对于正压无辐散流体，运动方程可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\zeta_a v=-\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{1.a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\zeta_a u=-\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{1.b}$$

式中 u, v 分别为 x, y 方向上的风速分量。

$$\zeta_a=\zeta+f \qquad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

Φ 为总能，它可表示为

$$\Phi=\phi+\frac{1}{2}(u^2+v^2) \tag{3}$$

* 本文于1987年1月14日收到，1987年6月15日收到修改稿。

ϕ 为位势。在 β 平面上，f 可写成

$$f=f_0+\beta y \tag{4}$$

$\beta=\dfrac{df}{dy}$，视为常数。

运动如果是水平无辐散的，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{5}$$

因此，可引入流函数 ψ，它满足

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{6}$$

将(4)和(6)代入(1)可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(\Phi-\zeta_a\psi)-\psi\frac{\partial\zeta_a}{\partial x} \tag{7.a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}(\Phi-\zeta_a\psi)-\psi\frac{\partial\zeta_a}{\partial y} \tag{7.b}$$

或

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\nabla(\Phi-\zeta_a\psi)-\psi\nabla\zeta_a \tag{7.c}$$

上式是考虑了 β 作用与无辐散条件的非线性运动方程。在文[2]中，对此方程的优点已作过分析与讨论。

如果存在一种参考态 ψ_0，则有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\delta\boldsymbol{v} \tag{8}$$

以下用附标“。”表示参考态，δ 表示扰动。相似地，对任一物理量，如 $\psi\nabla\zeta_a$，也可写成

$$\psi\nabla\zeta_a=(\psi\nabla\zeta_a)_0+\delta(\psi\nabla\zeta_a) \tag{9}$$

如此，(7)式可写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta\boldsymbol{v}}{\partial t}=&-\frac{\partial\boldsymbol{v}_0}{\partial t}-\nabla(\Phi-\psi\zeta_a)_0-(\psi\nabla\zeta_a)_0\\&-\delta\nabla(\Phi-\psi\zeta_a)-\delta(\psi\nabla\zeta_a)\end{aligned} \tag{10}$$

这里已假定 ∇ 与 δ 可以互换，即意味着扰动是连续可微的。

将(10)式点乘 $\delta\boldsymbol{v}$，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}|\delta\boldsymbol{v}|^2=&-\frac{\partial\boldsymbol{v}_0}{\partial t}\cdot\delta\boldsymbol{v}-\delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla(\Phi-\psi\zeta_a)_0\\&-\delta\boldsymbol{v}\cdot(\psi\nabla\zeta_a)_0-\delta\boldsymbol{v}\cdot\delta(\psi\nabla\zeta_a)\\&-\delta\boldsymbol{v}\cdot\delta\nabla(\Phi-\psi\zeta_a)\end{aligned} \tag{11}$$

因

$$\delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla(\Phi-\psi\zeta_a)=\nabla\cdot[\delta\boldsymbol{v}(\Phi-\psi\zeta_a)]-(\Phi-\psi\zeta_a)\nabla\cdot\delta\boldsymbol{v} \tag{12}$$

由无辐散条件 $\nabla\cdot\delta\boldsymbol{v}=0$，可得 $\delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla(\Phi-\psi\zeta_a)=\nabla\cdot[\delta\boldsymbol{v}(\Phi-\psi\zeta_a)]$。将(11)式对全球积分，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{1}{2}|\delta\boldsymbol{v}|^2d\tau=&-\int\frac{\partial\boldsymbol{v}_0}{\partial t}\cdot\delta\boldsymbol{v}\,d\tau-\int\delta\boldsymbol{v}\cdot(\psi\nabla\zeta_a)_0d\tau\\&-\int\delta\boldsymbol{v}\cdot\delta(\psi\nabla\zeta_a)d\tau\end{aligned} \tag{13}$$

在参考态附近,如扰动是一微量,如此 $\delta v\cdot\delta(\psi\nabla\zeta_a)$较小可略去,(13)式于是可近似地写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{1}{2}|\delta v|^2 d\tau=-\int\frac{\partial v_0}{\partial t}\cdot\delta v\, d\tau-\int\delta v\cdot(\psi\nabla\zeta_a)_0 d\tau \tag{14}$$

再对时间积分,可得

$$\int\frac{1}{2}|\delta v|^2 d\tau=-\delta\int\left[\frac{\partial v_0}{\partial t}+(\psi\nabla\zeta_a)_0\right]\cdot v\,d\tau dt\geqslant 0 \tag{15}$$

令

$$F(\psi,\ \psi_0)=-\int\left[\frac{\partial v_0}{\partial t}+(\psi\nabla\zeta_a)_0\right]\cdot v\,d\tau dt \tag{16}$$

(15)式右端就等于 δF,而 $F(\psi,\psi_0)$ 可视为一个双变量的泛函。

考虑在参考态附近 F 的增量

$$\begin{aligned}\Delta F&=F(\psi,\ \psi_0)-F(\psi_0,\ \psi_0)\\&=\int\left[\frac{\partial v_0}{\partial t}+(\psi\nabla\zeta_a)_0\right]\cdot(v_0-v)d\tau dt\end{aligned} \tag{17}$$

可见在参考态 $\psi=\psi_0$,有 $v=v_0$,因此

$$\Delta F=0 \tag{18}$$

而当偏离参考态时,$\psi\neq\psi_0$,则从(15)式可知

$$\Delta F>0 \tag{19}$$

对于整个系统,在参考态附近有

$$\int[F(\psi,\ \psi_0)-F(\psi_0,\ \psi_0)]d\tau dt>0 \tag{20}$$

下图示意地表示了 $F(\psi,\psi_0)$ 的这一性质。

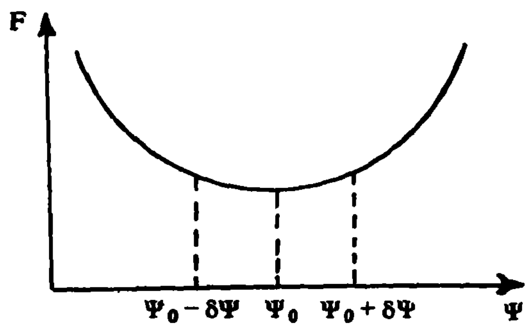

图 $F(\psi,\ \psi_0)$的示意图

由 $F(\psi,\psi_0)$ 的这一性质可知,对于变分 $\delta\psi$ 有

$$\left.\frac{\delta F}{\delta\psi}\right|_{\psi=\psi_0}=0 \tag{21}$$

即在 $\psi=\psi_0$ 时,F 为最小值。 如此,将风速 v 用流函数 ψ 代入,可得 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta F}{\delta\psi}\right|_{\psi=\psi_0}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial t\partial y}+\psi_0\frac{\partial\zeta_{a0}}{\partial y}\right)\Big|_{\psi=\psi_0}\\&+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial t\partial x}+\psi_0\frac{\partial\zeta_{a0}}{\partial x}\right)\Big|_{\psi=\psi_0}=0\end{aligned} \tag{22}$$

经整理后可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+J(\psi,\ \nabla^2\psi+f)=0 \tag{23}$$

这即无辐散条件下的涡度守恒原理。

按 Glansdorff 和 Prigogine[4]，具有性质(19)和(22)的泛函 $F(\psi,\psi_0)$称为局地势。根据上述分析，可知：在参考态，局地势为最小值。此时，运动满足涡度守恒原理。因此，可以从运动方程出发，利用局地势方法得到涡度守恒方程。事实上，推求涡度方程本身并不需要按上述方法进行。引进局地势，应用变分原理，是使得把推求涡度方程的过程与求泛函极值联系起来，它包含了使局地势达到最小的意义。

以上讨论了平均流场为非定常的情形。对于定常平均流场$\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t}=0\right)$，类似于上面的做法，立即可得

$$F(\psi,\ \psi_0)=-\int(\psi\nabla\zeta_a)_0\cdot\boldsymbol{v}d\tau dt \tag{24}$$

此时，$F(\psi,\psi_0)$为定常平均流场中的局地势。在 $\psi=\psi_0$ 时，$F(\psi,\psi_0)$为最小值，即有

$$\left.\frac{\delta F}{\delta\psi}\right|_{\psi=\psi_0}=0$$

利用 Euler-Lagrange 方程，可得

$$J(\psi,\ \nabla^2\psi+f)=0 \tag{25}$$

这即定常情况下的涡度守恒方程。

三、含地形作用的局地势

上节的结果还可推广到具有地形作用的情形。对于均质不可压缩流体，有连续方程

$$\nabla\cdot(D-h)\boldsymbol{v}=0 \tag{26}$$

其中 D 为水深，h 为地形高度，如此有

$$\boldsymbol{v}=\left(1-\frac{h}{D}\right)^{-1}\boldsymbol{k}\times\nabla\psi \tag{27}$$

将此式代入运动方程，则可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi-\zeta_a\left(1-\frac{h}{D}\right)^{-1}\psi\right]-\psi\frac{\partial}{\partial x}\left[\zeta_a\left(1-\frac{h}{D}\right)^{-1}\right] \tag{28.a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi-\zeta_a\left(1-\frac{h}{D}\right)^{-1}\psi\right]-\psi\frac{\partial}{\partial y}\left[\zeta_a\left(1-\frac{h}{D}\right)^{-1}\right] \tag{28.b}$$

相似于上节处理，可得局地势

$$\tilde{F}(\psi,\ \psi_0)=-\int\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}_0}{\partial t}+\psi_0\nabla\left(\zeta_a\left(1-\frac{h}{D}\right)^{-1}\right)_0\right]\cdot\boldsymbol{v}d\tau dt \tag{29}$$

与局地势达最小相应地有

$$\left.\frac{\delta\tilde{F}}{\delta\psi}\right|_{\psi=\psi_0}=0 \tag{30}$$

即可得

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+J\left(\psi,\ (\nabla^2\psi+f)\left(1-\frac{h}{D}\right)^{-1}\right)=0 \tag{31}$$

上式中 ζ 即为$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$，利用(27)式，可得

$$\zeta=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{h}{D}\right)^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1-\frac{h}{D}\right)^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] \tag{32}$$

(31)式即考虑了地形作用的涡度守恒方程。

四、Lagrange 函数与局地势

对于线性化的涡度方程,Whitham 利用下法求出了 Lagrange 函数。

线性化的涡度方程为

$$\nabla^2\frac{\partial\psi}{\partial t}+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \tag{33}$$

作变换

$$\psi=\frac{\partial F}{\partial t} \tag{34}$$

则(33)式化为

$$\nabla^2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x}=0 \tag{35}$$

对于这类方程的变分问题,利用一般数学原理很容易求得 J,它相当于求下列泛函的极值

$$J=\int\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial t}\right)^2-\beta\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}\right]d\tau dt \tag{36}$$

换言之,(36)式的 Euler-Lagrange 方程即为(35)式。从(36)式可知 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial t}\right)^2-\beta\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}\right] \tag{37}$$

上式右端第一、二项为动能,这从 F 函数的定义式(34)可直接推之,而第三项Buchwald[5]曾证明了它为波动位能。

本工作则是放弃了直接从涡度方程出发,而是从运动方程利用局地势方法寻求变分问题。所得结果表明,当局地势达到最小值时具有涡度守恒原理。于此,对局地势再做些分析。

对于平均流场,运动方程(7)可写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t}=-\nabla(\Phi-\psi\zeta_a)_0-(\psi\nabla\zeta_a)_0 \tag{38}$$

或

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t}+(\psi\nabla\zeta_a)_0=-\nabla(\Phi-\psi\zeta_a)_0 \tag{39}$$

将此关系代入(16),即得

$$F(\psi,\ \psi_0)=\int\nabla(\Phi-\psi\zeta_a)_0\cdot\boldsymbol{v}d\tau dt \tag{40}$$

由于 $\nabla(\Phi-\psi\zeta_a)_0$ 为一保守力,故(40)式实际上是由保守力作功的总和。而

$$(\Phi-\psi\zeta_a)_0=\phi_0+\frac{1}{2}(u_0^2+v_0^2)-(\psi\ \zeta_a)_0 \tag{41}$$

ϕ_0 为位势,$\frac{1}{2}(u_0^2+v_0^2)$为动能,$(\psi\ \zeta_a)_0$ 为涡旋能,它是由于大气中涡旋运动所引起的一种能量。而局地势就是由这些能量梯度力所引起的某一能量之总和。因此,从某种意义上来说(41)式与 Lagrange 函数是有相似之处的。

从以上讨论可看出局地势与 Lagrange 函数的异同。除此之外，还可看出，利用(16)式求极值的过程，实际上就是相当于利用运动方程求旋度的过程。换言之，推求涡度方程的过程，从某种意义上讲，包含了使得局地势达到最小的物理意义。

利用局地势方法，可以使我们寻求方程的近似解，使其误差为最小。按 Prigogine 的方法，选取基函数，利用求泛函极值原理，可以决定出基函数的各个系数，并由此寻求方程的近似解。这种方法较之气象上常用的截谱方法具有一定的相似之处。截谱方法只是假设取基函数中的几项，并未涉及求泛函极值的问题。而利用局地势方法可使寻求方程的近似解，同时也有使误差化为最小的优点。

下面将用一个简单例子来加以说明：

令

$$\psi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(t)\psi_n,\quad \psi_0=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n^{\circ}(t)\psi_n \tag{42}$$

其中 ψ_n 为坐标元素，一般取正交完备函数系，也可取某些特殊形式，关于这一点可参见有关 Galerkin 方法。

实际计算中，n 只取有限项，问题是如何挑取系数 $A_n(t)$ 使其误差最小。现如取

$$\psi_n=e^{i\theta_n},\quad \theta_n=k_nx+m_ny \tag{43}$$

θ_n 为 n 波的位相，k_n,m_n 分别为波矢分量。在 ψ_n 为实函数时，有

$$A_n=-A_{-n},\quad A_n=A^*_{-n} \tag{44}$$

此外，利用 ψ_n 的规一正交条件，即

$$\int\psi_n\psi_m d\tau=\begin{cases}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{cases} \tag{45}$$

以及共扼条件：

$$\int\psi_n\psi_m\psi_e d\tau=\begin{cases}0, & \theta_n+\theta_s+\theta_e\neq 0\\ 1, & \theta_n+\theta_s+\theta_e=0\end{cases} \tag{46}$$

将这些关系代入局地势，如此可求得：

$$F(\psi,\ \psi_0)=\sum_s[\dot{A}_s^{\circ}(m_s^2+k_s^2)-\beta ik_sA_s^{\circ}+$$

$$+\sum_p\sum_q(m_sk_p-m_pk_s)(m_s^2+k_s^2)A_q^{\circ}A_p^{\circ}]A_s \tag{47}$$

从(21)式可知，在求 $F(\psi,\psi_0)$ 的极值时，相当于利用(47)式求 A_n，使其达到极值，即

$$\frac{\partial F}{\partial A_s}=0,\quad A_s=A_s^{\circ} \tag{48}$$

关于这一点，在[4]中有过详细讨论。

利用(47)、(48)式，可求得：

$$(k_s+m_s^2)\dot{A}_s=ik_s\beta A_s-\sum_p\sum_q(m_sk_p-m_pk_s)(m_s^2+k_s^2)A_pA_q \tag{49}$$

其中 p,q 为满足(46)式的指标。

上述求 $\dot{A}_s$ 的过程，与直接将(42)式取有限项即截谱代入方程(23)式是相似的，但在

上述过程中，包含了求其极值的过程，而截谱截多少个谱是具有经验性的。有关利用上述方法研究地形与 Rossby 波的结果，将另文予以报告。

参 考 文 献

[1] Seliger, R. L., and G. B. Whitham, Variational principles in continuum mechanics Proc. Roy. Soc. A. 305, 1—25, 1968.
[2] 伍荣生，Rossby 波的能量，能量通量以及 Lagrange 函数，气象学报，44, 158—165, 1986。
[3] Finlayson, E. A., The method of weighted residuals and variational principles Academic Press., 412, 1972.
[4] Glansdoff P., and I. Prigogine, Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations, Wiley, New York, 306, 1971.
[5] Buchwald, V. T., Energy and energy flux in planetary waves Proc. Roy. Soc Lond. A 328, 37—48, 1972.

LOCAL POTENTIAL AND PRINCIPLE OF CONSERVATION OF VORTICITY

Wu Rongsheng
(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University)

Hou Zhiming
(Institute of Meteorology, P.L.A. Air Force)

Abstract

In this paper, the local potential of non-divergence flow on Beta plane is derived from the momentum equation. The conservative principle of vorticity is obtained when the local potential tends to minimum with the variational technique. Some other properties such as Lagrangian of vorticity equation, energy etc. are also discussed briefly here.