

# 变步长显式完全平方守恒差分格式\*

王斌

季仲贞

(中国科学院计算中心, 北京 100080) (LASG, 中国科学院大气物理研究所, 北京, 100080)

## 摘 要

综合隐式完全平方守恒差分格式和显式瞬时平方守恒差分格式的优点, 针对一类非线性发展方程构造了一种通过自动调节时间步长来保持平方守恒性的显式差分格式。它基于加小耗散的思想, 但又与小耗散法有所不同。本文取的耗散项不是一般的人工耗散, 而是取能够弥补由于时间离散所产生的截断误差的所谓(时间)协调耗散。因此, 该格式具有较高的时间精度。在数值试验中, 该类格式可取得满意的效果。

**关键词:** 变步长, 显式格式, 平方守恒, 协调耗散。

## 1 引 言

经典的平方守恒差分格式一般可分为完全平方守恒和瞬时平方守恒两大类。这两类格式各有其优缺点。完全平方守恒差分格式能完全保持原微分方程的重要物理特征——能量守恒性, 因而从数学上讲具有良好的计算稳定性。但一般情况下, 该类格式是隐式的, 求解困难, 因此, 在实际计算中费时较多。而瞬时平方守恒差分格式虽可显式求解, 但只能瞬时保持能量守恒性, 计算稳定性较差。所以, 怎样构造一种既能保持经典平方守恒差分格式的优点又能弥补其不足的新格式成为了一个有趣的课题。文献[1, 2]中构造的定步长显式完全平方守恒差分格式就是这类新格式中的一种。该格式首次实现了既能显式求解又能完全平方守恒, 并在实际数值模拟中取得了显著的省时效果<sup>[3]</sup>。它建立在小耗散法<sup>[4, 5]</sup>的基础上, 通过调节耗散系数来达到完全平方守恒。本文将在同一思想基础上通过调节时间步长来构造另一新格式——变步长显式完全平方守恒差分格式。

## 2 基本原理

对于非线性算子发展方程:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{L}F = 0 \quad (1)$$

假设空间微分算子  $\mathcal{L}$  反对称, 即在  $L_2$  空间对任何  $G$  均满足:

$$(\mathcal{L}G, G)_c = 0 \quad (2)$$

则它在  $L_2$  中具有平方守恒性:

\* 1993 年 6 月 1 日收到来稿。得到国家科委“攀登”计划重大关键项目的部分资助。

$$\frac{d}{dt} \|F\|^2 = 0 \quad (3)$$

将  $\mathcal{L}$  离散化, 便得如下微分-差分方程:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + AF = 0 \quad (4)$$

其中,  $A$  为与  $\mathcal{L}$  相容的空间差分算子。由文献[6,7]可知, 在条件(2)下可以构造出反对称的空间差分算子  $A$ , 即在  $l^2$  中对任何  $G$  均有:

$$(AG, G)_d = 0 \quad (5)$$

在这种情况下, 方程(4)在  $l^2$  中亦平方守恒:

$$\frac{d}{dt} \|F\|_d^2 = 0 \quad (6)$$

下面, 我们就从(4)出发, 采用 Taylor 展开法来构造求解方程(4)的变步长显式完全平方守恒差分格式。为此, 不妨设方程(4)的解在时间方向充分光滑, 则  $(F)^{n+1} = F|_{t=t_{n+1}}$  可在  $t = t_n$  点展开:

$$(F)^{n+1} = (F)^n + \tau \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^n + \frac{\tau^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)^n + \dots \quad (7)$$

其中  $\tau = t_{n+1} - t_n$ 。作算子  $B$ :

$$BF = -2 \left[ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\tau}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} + \dots + \frac{\tau^{m-1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} F}{\partial t^{m+1}} \right] + o(\tau^m) \quad (8)$$

则  $B$  称为方程(4)的  $m$  阶(时间)协调耗散算子<sup>[8]</sup>。不难证明, 在一定条件下  $B$  是正定的<sup>[8]</sup>, 即对任何  $G \in l^2, G \neq 0$ , 均有:

$$(BG, G)_d > 0 \quad (9)$$

这样, 利用(4)和(8)可将(7)简化成:

$$\frac{(F)^{n+1} - (F)^n}{\tau} + A(F)^n + \frac{1}{2} \tau B(F)^n = o(\tau^m + 1) \quad (7')$$

舍去右端的小项, 则得具有  $m+1$  阶时间精度的差分格式:

$$\frac{F^{n+1} - F^n}{\tau} + AF^n + \frac{1}{2} \tau BF^n = 0 \quad (10)$$

更一般地, 若将  $\tau BF^n$  前的系数  $\frac{1}{2}$  用一灵活性参数<sup>[9]</sup>  $\epsilon$  代替, 则得到一般形式的(时间)协调耗散格式:

$$\frac{F^{n+1} - F^n}{\tau} + AF^n + \epsilon \tau BF^n = 0 \quad (11)$$

其中  $\epsilon$  称为耗散系数。显然, 若取  $\epsilon = \frac{1}{2} + o(\tau^m)$ , 则在定义(8)下, 该格式的时间精度为  $m+1$  阶。若固定  $\tau, \epsilon$  按文献[1,2]的方法取, 即  $\epsilon$  满足:

$$\epsilon = \epsilon_n = K_1 / [(1 - \tau K_2) + \sqrt{(1 - \tau K_2)^2 - \tau^2 K_1 K_3}] \quad (12)$$

则格式(11)为定步长显式完全平方守恒差分格式。其中  $K_1, K_2$  和  $K_3$  满足:

$$\begin{cases} K_1 = \|AF^n\|^2 / (BF^n, F^n) \\ K_2 = (BF^n, AF^n) / (BF^n, F^n) \\ K_3 = \|BF^n\|^2 / (BF^n, F^n) \end{cases} \quad (13)$$

现在,我们不通过调节  $\epsilon$  而通过调节时间步长  $\tau$  来实现格式(11)的平方守恒性,从而得到变步长显式完全平方守恒差分格式。类似文献[2],不难证明如下定理:

定理 1:假定方程(1)中空间微分算子  $\mathcal{L}$  反对称,那么,若相应的空间差分算子  $A$  也反对称,即  $A$  满足条件(5),  $B$  由(8)定义,则当

$$K_1 < 2\epsilon \quad (|\epsilon - \frac{1}{2}| < \delta, \delta \text{ 为一小量}) \quad (14)$$

以及

$$\tau = \tau_n = (2 - \frac{1}{\epsilon}K_1) / [K_2 + \sqrt{K_2^2 + \epsilon(2 - \frac{1}{\epsilon}K_1)K_3}] \quad (15)$$

时,差分格式(11)为变步长显式完全平方守恒差分格式,且当  $\epsilon = 1 + o(\tau^m)$  时,该格式具有  $m + 1$  阶时间精度。其中,  $K_1, K_2$  和  $K_3$  满足式(13)。

### 3 协调耗散算子的具体应用

在文献[8]中,我们介绍了协调耗散算子及其性质和构造,并研究了它在定步长显式完全平方守恒差分格式中的作用。然而,从定义(8)和文献[8]可知,协调耗散算子  $B$  一般情况下依赖于时间步长  $\tau$ :

$$B = B_\tau \quad (16)$$

这样,若直接将其用于定理 1,则式(15)~(13)将成为  $\tau$  的隐式求解形式,这将给求解带来很大的麻烦。为了解决这个问题,下面介绍两种可行的方案。

#### 3.1 定步协调耗散法

顾名思义,所谓定步协调耗散即  $B$  中的  $\tau$  预先取定为一个适当的  $\tau_0$ ,并且不随时间的发展而变化。这样,式(15)~(13)便成为  $\tau$  的显式求解方式。致于怎样取  $\tau_0$ ,目前尚未找到理论上的依据。经验的取法一般把  $\tau_0$  取为文献[1,2]中相应的定步长显式完全平方守恒差分格式的时间步长。数值试验发现,当这样选取  $\tau_0$  时,由式(15)~(13)求得的  $\tau = \tau_n$  总是大于  $\tau_0$ ,因而,变步长显式完全平方守恒差分格式总是比定步长显式完全平方守恒差分格式要省时间。

#### 3.2 滞后协调耗散法

既然在  $t = t_n$  时刻由式(15)~(13)求解  $\tau = \tau_n$  时  $B$  算子中不能含有  $\tau_n$ ,那么不妨将  $B$  中的  $\tau$  滞后一步,取为  $\tau_{n-1}$ ,这样亦可显式从式(15)~(13)中求出  $\tau_n$ 。由于  $\tau_n$  与  $\tau_{n-1}$  的差别总是要比与预先取定的  $\tau_0$  的差别要小,因此,这种方法更加合理。至于初始时刻,我们可用定步协调耗散法求  $\tau$ 。

然而,在数值试验中发现,用这种方法积分时,在积分初期可能出现奇异点。即在最初几步中的某一步由于前一步求得的时间步长太大,以致在求这一步的时间步长时出现负数开根。为了克服这个缺点,我们采取下列修正方案:

$$\begin{cases} \tau_n^* = \begin{cases} \tau_{n-1}, & \tau_{n-1} \leq 2\tau_0 \\ \tau_0, & \tau_{n-1} > 2\tau_0 \end{cases} \\ B_n = B_{\tau_n^*} \end{cases} \quad (17)$$

#### 4 耗散系数的选取

在定理 1 中,格式(11)的平方守恒性是通过调节时间步长  $\tau_n$  来实现的。然而,从式(15)易知,  $\tau$  依赖于耗散系数  $\epsilon$ ,  $\epsilon$  选取的好坏直接影响  $\tau$  的大小,从而影响格式的时间效益。因此,我们有必要研究一下  $\epsilon$  的选取。

从省时的角度讲,选取的  $\epsilon$  应该使得  $\tau$  达到极大值,这是选取的标准。于是,利用数学分析的知识不难证明如下定理:

定理 2:假设  $B$  与  $\tau_n$  无关,则当

$$\epsilon = \epsilon_n = \frac{K_0 + 1}{K_0} K_1 \quad (18)$$

时,由式(15)–(13)求得的  $\tau = \tau_n$  达到极大值,即

$$\left(\frac{\partial \tau_n}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=\epsilon_n} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \tau_n}{\partial \epsilon^2}\right)_{\epsilon=\epsilon_n} < 0 \quad (19)$$

其中,  $K_0 = \sqrt{K_1 K_3 / K_2}$ , 而  $K_1, K_2$  和  $K_3$  满足式(13)。

由于篇幅的限制,定理的证明从略。从数值试验的结果看,用式(18)求得的  $\epsilon_n$  总的说来变化甚微,总在  $\frac{1}{2}$  很小的邻域内振动,仅在最初几步变化较大。因此,有时也可以简单地取  $\epsilon_n \equiv \frac{1}{2}$ 。

#### 5 数值试验及讨论

前面,我们从理论上研究了变步长显式完全平方守恒差分格式。那么,该格式在实际计算中是否可行?其计算效果和时间效益如何?要回答这些问题,最好的方法就是数值试验。

首先,我们具体构造球面正压“浅水”方程的变步长显式完全平方守恒差分格式。对于球面正压“浅水”方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\cos\theta} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + u \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v^* \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - f^* v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\cos\theta} \left[ \cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + u \frac{\partial v}{\partial \lambda} + v^* \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + f^* u = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\cos\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v^* \varphi) \right] = 0 \end{cases} \quad (20)$$

其中  $v^* = v \cos\theta, f^* = 2\Omega \sin\theta + utg\theta/a$ , 令  $h = A \sqrt{\varphi}, h^* = h \cos\theta, U = uh, V = vh$ , 则得上述方程的 IAP 形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\cos\theta} \left\{ h \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u U}{\partial \lambda} + u \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right) + \left( \frac{\partial v^* U}{\partial \theta} + v^* \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right] \right\} - f^* V = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\cos\theta} \left\{ h^* \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u V}{\partial \lambda} + u \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) + \left( \frac{\partial v^* V}{\partial \theta} + v^* \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right] \right\} + f^* U = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\cos\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (hU) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h^* V) \right] = 0 \end{cases} \quad (21)$$

在式(21)的基础上将其写成向量算子形式。为此,记

$$\begin{cases} \hat{F} = (U, V, \varphi)^T \\ \mathcal{L}\hat{F} = \frac{1}{2a\cos} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (A^T \hat{F}) + A \frac{\partial \hat{F}}{\partial \lambda} + \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (B^T \hat{F}) + B \frac{\partial \hat{F}}{\partial \theta} \right] \right\} + C\hat{F} \end{cases} \quad (22)$$

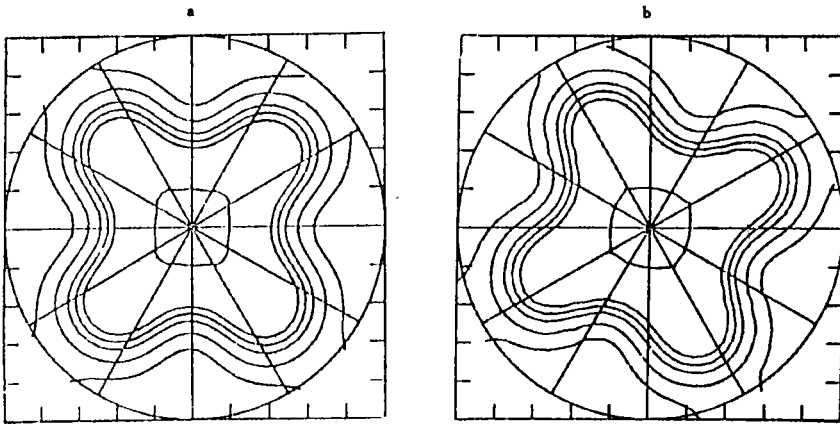
其中

$$A = \begin{pmatrix} u & 0 & 2h \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} v^* & 0 & 0 \\ 0 & v^* & 2h^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -f^* & 0 \\ f^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

则方程(21)可写成如下算子形式:

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \mathcal{L}\hat{F} = 0 \quad (24)$$

这与方程(1)在形式上是一致的。易证,在周期或刚壁边界条件下,由式(22)定义的空间微分算子 $\mathcal{L}$ 是反对称的,故式(24)具有能量守恒性。这样,前面介绍的变步长显式完全平方守恒差分格式的理论就可直接用于方程(24)。



附图 变步长显式完全平方守恒差分格式数值试验图

(a, 计算 R-H 波 100d; b, 计算 R-H 波 120d)

格式构造好后,我们来作数值检验。以 4 波 Rossby-Haurwitz 波为初始场,采用  $80 \times 20$  的网格对北半球进行数值积分,结果令人满意。附图 a, b 分别是积分 100d 和 120d  $\varphi$  的结果,不难看出,其波形基本保持不变,位相移速与真解接近,大致每 8d 绕半圈。另外,附表给出了总能量,总质量,时间步长和耗散系数随时间的演变。易知,总能量 ( $E_n =$

$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \varphi_{i,j} \cos \theta_j [(u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^n)^2 + \varphi_{i,j}]$ ) 和总质量 ( $M_n = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \varphi_{i,j} \cos \theta_j$ ) 始终保持不变,而

时间步长和耗散系数变化也非常小(最初几步除外),它们分别在  $\tau_c = 393$  和  $\epsilon_c = \frac{1}{2}$  的小邻域内振动,且  $\tau_n$  总是大于  $\tau_0$ ,因而该格式比定步长显式完全平方守恒差分格式<sup>[8]</sup>稍省时间。其中,  $\tau_0 = 390s$ ,  $B$  算子取为 3 阶协调耗散算子<sup>[8]</sup>。

附表 总能量、总质量、时间步长和耗散系数的演变

步数 $n$	总能量 $E_n(m^4/s^4)$	总质量 $M_n(m^2/s^2)$	时间步长 $\tau_n(s)$	耗散系数 $\epsilon_n$
1	15236914614094.2	175248643.214532	4651.8812	0.9713919
2	15236914614094.2	175248643.214532	643.7872	0.7682802
3	15236914614094.2	175248643.214532	792.8597	0.6217129
4	15236914614094.2	175248643.214532	605.8132	0.7463480
5	15236914614094.2	175248643.214532	666.6552	0.5356508
6	15236914614094.2	175248643.214532	439.6539	0.5515447
7	15236914614094.2	175248643.214532	511.8193	0.3905933
8	15236914614094.2	175248643.214532	421.2960	0.4889481
10	15236914614094.2	175248643.214532	414.5713	0.5262496
12	15236914614094.2	175248643.214532	401.5702	0.5195447
14	15236914614094.2	175248643.214532	395.7377	0.5194294
360	15236914614094.2	175248643.214532	394.4008	0.4961829
720	15236914614094.2	175248643.214532	393.2508	0.4998189
1440	15236914614094.2	175248643.214532	392.8360	0.4998222
2880	15236914614094.2	175248643.214532	393.4269	0.4998978
3240	15236914614094.2	175248643.214532	393.3417	0.4999269
3600	15236914614094.2	175248643.214532	392.6432	0.4998882
3960	15236914614094.2	175248643.214532	392.9512	0.4999732
4320	15236914614094.2	175248643.214532	393.6586	0.4999010

从数值试验可知,变步长显式完全平方守恒差分格式确实是可行的,且可获得良好的计算效果和时间效益。另外,由于  $\tau_n$  和  $\epsilon_n$  在积分过程中变化很小,为了节省时间,我们不必每步计算它们,直接近似地取  $\tau_n \equiv \bar{\tau}_0 = \min\{\tau_n\}$ ,  $\epsilon_n = \epsilon_c$ , 这样便减少了计算量,而且守恒性基本保持,计算效果与原来完全一样(注意,由于用简化方案积分的结果与附图完全一样,故不再给出。至于守恒量的演变,它们近似保持守恒,精确到 9 位有效数,但原方案却精确到 16 位有效数。由于篇幅有限,不再给出其具体对比表格,仅作说明)。

致谢:衷心感谢曾庆存教授的指导!

## 参考文献

- [1] 王斌,季仲贞. 显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验. 科学通报, 1990, 35(10): 766—768.
- [2] 季仲贞,王斌. 再论发展方程差分格式的构造和应用. 大气科学, 1991, 15(2), 1—10.
- [3] 王斌,季仲贞,李荣凤. 显式完全平方守恒差分格式及其省时技巧在近岸海流数值模拟中的应用. 热带海洋, 1994, 13(3).
- [4] 曾庆存,季仲贞. 发展方程的计算稳定性问题. 计算数学, 1981, 1: 79—86.
- [5] 曾庆存,季仲贞. 关于非线性计算不稳定的若干问题. 力学学报, 1981, (3): 209—217.
- [6] 王斌. 用待定系数法构造平方守恒差分格式. 中国科学院中国科学技术大学研究生院学报, 1988, 5(2): 84—91.
- [7] 季仲贞. 平方守恒型差分格式的构造. 中期数值天气预报论文集, 姜达雍等编. 北京: 气象出版社, 1982, 77—86.
- [8] 王斌,季仲贞. 协调耗散算子与显式完全平方守恒差分格式. 中国科学, 1993, 23(6): 665—672.
- [9] 张学洪,曾庆存. 大洋环流数值模式的计算设计. 大气科学(特刊), 1988, 149—165.

# A SPECIES OF EXPLICIT COMPLETE SQUARE CONSERVATIVE DIFFERENCE SCHEMES WITH ADJUSTABLE TIME STEP INTERVALS

Wang Bin

*(Computing center, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)*

Ji Zhongzhen

*(LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)*

## Abstract

In this paper, a kind of explicit difference schemes to solve nonlinear evolution equations, perfectly keeping the square conservation by adjusting the time step interval, is constructed, from the comprehensive maintenance of the advantages of the implicit complete square conservative scheme and the explicit instantaneous square conservative scheme. The new schemes are based on the thought of adding a small dissipation, but it is different from the Small Dissipation Method. The dissipative term used in the new schemes is not a simple artificial dissipative term. It is a so-called (time) consistent dissipative term that can compensate for the truncation errors from the dissociation of the time differential term. Therefore, the new schemes may have a high time precision and may acquire a satisfactory effect in numerical tests.

**Key words:** Adjustable time interval, Explicit scheme, Square conservation, Harmonious dissipation.