

斜压罗斯贝波非线性问题的研究*

陶建军

(湘潭师范学院地理系, 湘潭市, 411201)

摘要

本文利用两层斜压准地转模式, 讨论了波-流相互作用问题, 得到以下结论: (1) 当大气中基本流切变较大时, 波流间能量交换明显。切变较小时, 波幅变化较小; (2) 在较小的基本流切变下, 波动可出现稳定的平衡态, 此平衡态多为相当正压状态; (3) 斜压波在发展过程中, 温度场和流场之间具有制约关系。

关键词: 非线性罗斯贝波, 能量交换, 平衡态。

1 引言

关于大气中波动与纬向流相互作用问题, 早在1970年代, Pedlosky^[1]就利用多尺度方法对它进行了研究, 随后, 国内有不少学者在这方面做了很多工作^[2, 3]。本文对波-流相互作用方程组进行了适当变换, 将其化为一个非线性系统, 由这个系统, 得到了几个守恒量。同时, 本文还讨论了该系统的平衡态问题, 得出一些有意义的结果。

2 模式

无热源, 无耗散两层准地转模式写成:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)^2 \Psi_m + J(\Psi_m, \cdot)^2 \Psi_m + J(\Psi_T, \cdot)^2 \Psi_T + \beta^* \frac{\partial \Psi_m}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)^2 - \lambda^* \Psi_T + J(\Psi_m, \cdot)^2 \Psi_T + J(\Psi_T, \cdot)^2 \Psi_m - \lambda^* J(\Psi_m, \Psi_T) + \beta^* \frac{\partial \Psi_T}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\Psi_m = (\Psi_1 + \Psi_3)/2; \quad \Psi_T = (\Psi_1 - \Psi_3)/2$$

其中 Ψ_1, Ψ_3 分别为上层和下层流函数, 各变量均已无量纲化, 其他符号均为气象上常用符号。

β 平面南北边界为 $y = 0, \pi$ 。这里 y 为无量纲量, x 方向 Ψ_m, Ψ_T 为周期函数。只考虑波-流相互作用, 因而取^[3, 4]

$$\Psi_m = -u_0(y - y_0) + A e^{ikx} \sin y + (\cdot) + \dots \quad (3)$$

* 初稿时间: 1995年1月11日; 修改稿时间: 1996年8月19日。

$$\Psi_T = -u_T(y - y_0) + B e^{ikx} \sin y + (*) + \dots \quad (4)$$

其中 A, B, u_T, u_0 均为 t 的函数, $(*)$ 表示前一项的共轭。

将式(3), (4) 代入式(1), (2), 得谱系数方程:

$$\frac{dA}{dt} = ik\beta A - ik u_T B \quad (5)$$

$$\frac{dB}{dt} = ik S u_T A + ik\beta B \quad (6)$$

$$\frac{du_T}{dt} = aik(A^* B - B^* A) \quad (7)$$

其中 $\beta = \beta^* / (k^2 + 1) - u_0$, $\beta = \beta^* / (k^2 + 1 + \lambda^*) - u_0$, $S = \frac{\lambda^* - (k^2 + 1)}{\lambda^* + k^2 + 1}$, $a = \frac{6}{\pi^2}$ 。

若令 $E = A^2 + \frac{1}{S} B^2$, $\Phi = AB^* + BA^*$, $\Psi = i(A^* B - B^* A)$, 则由式(5) - (7) 可得:

$$\frac{dE}{dt} = -2k u_T \Psi \quad (8)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\beta k \Psi \quad (9)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \beta k \Phi - 2S k u_T E \quad (10)$$

$$\frac{du_T}{dt} = a k \Psi \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} (B^2 - S A^2) = 0 \quad (12)$$

这里, $\beta = \beta - \beta$ 。

上述方程组(8) - (11) 为一非线性系统, 它能较好地反映波-流之间的相互作用。

3 几个守恒量

由方程(8) - (12) 可得到以下几个守恒量:

$$m_0 = B^2 - S A^2 = \text{常量} \quad (13)$$

$$m_1 = a\Phi + \beta u_T = \text{常量} \quad (14)$$

$$m_2 = aE + u_T^2 = \text{常量} \quad (15)$$

$$m_3 = \Psi + \Phi^2 - SE^2 = \text{常量} \quad (16)$$

m_0, m_1, m_2, m_3 均由初值决定。

守恒量 m_0 表示流函数和厚度场函数在变化过程中具有制约关系, 若初始扰动为0, 则有: $B^2 = S A^2$, 即 $\frac{B}{A} = \sqrt{S}$, ($S > 0$)

对于波长较短的波, $k^2 + 1 \gg \lambda^*$, $S \approx 0$, $\frac{B}{A} \approx 0$, 即厚度扰动很弱。对于波长较长

的波, $k^2 + 1$ 较小, $S \ll 1$, $\frac{B}{A} \ll 1$, 厚度函数与流函数振幅相当。

守恒量 m_2 相当于波-流之间的能量守恒原理。由于波-流之间的相互作用, 纬向流会出现周期振荡。

若将式(11)对 t 求导, 再利用式(10)及守恒量 m_1 和 m_2 , 并设 $E_0 = \Phi_0 = \mathcal{Q} = 0, u_{T0} > 0$, 得:

$$\frac{d^2 u_T}{dt^2} = 2S k^2 u_T^3 - k^2 (\beta^2 + 2S u_{T0}^2) u_T + k^2 \beta^2 u_{T0} \quad (17)$$

上式两边同乘以 $\frac{du_T}{dt}$ 再积分, 并利用最大 u_T 处 $\frac{du_T}{dt} = 0$ 的条件, 得:

$$\left(\frac{du_T}{dt}\right)^2 = a_1(u_T^4 - u_{TM}^4) + a_2(u_T^2 - u_{TM}^2) + a_3(u_T - u_{TM}) \quad (18)$$

其中 $a_1 = S k^2$; $a_2 = -k^2(\beta^2 + 2S u_{T0}^2)$; $a_3 = 2k^2 \beta u_{T0}$, u_{TM} 表示 u_T 的极大值。

方程(18)可化为第一类完全椭圆积分, 其解可为椭圆函数, 具有周期性。

利用上述守恒量可求出 E 将出现的最大值。从式(8)可以看出, 当 $u_T = 0$ 或者 $\mathcal{Q} = 0$ 时, E 可取最大(小)值。假定初始时刻: $E_0 = \mathcal{Q} = \Phi_0 = 0$, 但 $u_{T0} > 0$, 则由守恒量 m_1, m_2, m_3 可得:

$$\mathcal{Q} = \frac{S}{a^2} (u_{T0} - u_T)^2 [(u_{T0} + u_T)^2 - \frac{\beta}{S}] \quad (19)$$

显然, 上式右边必须大于零, 从右边方括号内可以看出: 若 $u_{T0} < -\frac{\beta}{S} = 2u_{TC}$ (u_{TC} 为线性波的临界切变), 则 u_T 必须大于零等式才能满足, 这就是说, 在整个变化过程中, u_T 始终大于零, 因此, 使 E 取极值的条件只有 $\mathcal{Q} = 0$ 。由式(19)右边等于零解出 u_T (u_{T0}), 再利用式(15)可得:

$$E_M = \frac{4}{a} u_{TC} (u_{T0} - u_{TC}) \quad (20)$$

E_M 为 E 的最大值。对于一定的 u_{T0} 来说, E_M 与波数 k 有关。易证 E_M 存在极大值, 因此, 若将 E_M 对 k 求导, 令 $\frac{dE_M}{dk} = 0$, 得:

$$\frac{4}{a} (u_{T0} - 2u_{TC}) \frac{du_{TC}}{dk} = 0 \quad (21)$$

因为已假设 $u_{T0} < 2u_{TC}$, 所以只能 $\frac{du_{TC}}{dk} = 0$, 由线性理论知, $\frac{du_{TC}}{dk} = 0$ 时, u_{TC} 对应有极小值, 即所谓最小临界切变。可见, 最小临界切变处的扰动不仅优先发展, 而且发展起来后振幅也将最大。

若 $u_{T0} > \frac{\beta}{S} = 2u_{TC}$, 则由式(8)知, u_T 可小于零。这时 E 在 $u_T = 0$ 时取值最大, 即

$E_M = \frac{u_{T0}^2}{a}$, 这时的 E_M 与波数无关。

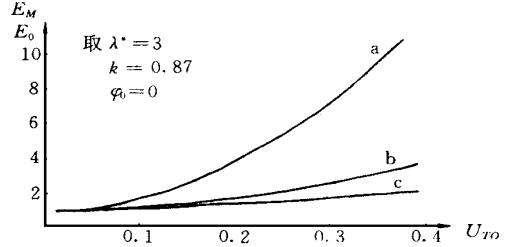
初值不为零时, 则由守恒量 m_1, m_2, m_3 , 得:

$$\mathcal{Q} = \frac{S}{a^2} (u_{T0} - u_T)^2 [(u_{T0} + u_T)^2 - \frac{\beta}{S}]$$

$$+ 2aE_0 \frac{u_{T0} + u_T}{u_{T0} - u_T} + \Phi_0 \left[\frac{\beta}{S} \frac{2a}{u_T - u_{T0}} \right] + \Phi \quad (22)$$

参照前面分析, 将 $u_T = 0$ 代入上式右边, 若大于零, 则表示 u_T 在变化过程中可以为零, 所以 E_M 在 $u_T = 0$ 处取最大值 $E_M = E_0 + \frac{u_{T0}^2}{a}$ 。若将 $u_T = 0$ 代入式(22) 右边, 其值小于零, 表明 u_T 在变化过程中不会为零, 所以 E_M 应由 $\Phi = 0$ 确定。这时从 $\Phi = 0$ 解出 u_T , 再代入式(15) 求出 E_M 。

由图1可见, 初始切变流 u_{T0} 越大, $\frac{E_M}{E_0}$ 也越大, 即波动幅度变化明显。其次, 若 u_{T0} 一定, 振幅小的波动变化幅度较大, 振幅大的波动变化小, 因此, 若大振幅的波动处在较小切变流的环境中, 则波动可维持少变。



4 平衡态及稳定性

系统方程组(8) - (11)的平衡态为:

$$\begin{cases} \beta\Phi - 2S u_T E = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad (23)$$

相应扰动方程是:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= - 2u_T k \Phi \\ \frac{d\Phi}{dt} &= - k \beta \Phi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= k \beta \Phi - 2S k u_T E - 2S k E u_T \\ \frac{du_T}{dt} &= a k \Phi \end{aligned} \quad (24)$$

利用 Φ 和 φ 的定义, 式(23)可写成:

$$\begin{cases} \beta A B \cos\alpha - S u_T (A^2 + \frac{1}{S} B^2) = 0 \\ 2 A B \sin\alpha = 0 \end{cases} \quad (25)$$

其中 $\alpha = \theta_m - \theta_r$ 为 Ψ_m 与 Ψ_r 之间的位相差, 当 $S > 0$ 时, 方程(25)对应非零平衡态:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta A B - S u_T A^2 - u_T B^2 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

由方程组(26)可解得:

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{u_T} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{u_T^2} - 4S} \right) \quad (27)$$

上式根号内必须大于零, 即要求 $\frac{\beta}{u_T} > 2\sqrt{S}$, 关于平衡态方程(26)的物理意义讨论如下:

令: $\Psi_3 = r \Psi_1$, 并设 r 为实数, 显然, 若 $r > 0$, 则表示 Ψ_3 与 Ψ_1 位相相同; 若 $r < 0$, 则

表示 Ψ_2 与 Ψ_3 反相。另外,由上面假设可得 $\Psi_m = \frac{1-r}{1+r}\Psi_T$,若 $r < 1$ 时,很明显 Ψ_m 与 Ψ_T 有相同位相,即 $\alpha = \theta_m - \theta_T = 0$,且高层波振幅大于低层波振幅。所以,平衡态(26)中 $\alpha = 0$ 对应于波动振幅随高度增大的高低层同相或者反相结构。

另外,若作 $\frac{\Psi_T}{\Psi_m} = \frac{B}{A} = \frac{1-r}{1+r}$,当 $r > 0$ 时, $\frac{B}{A} < 1$,这时对应着高低层波动同位相,即出现所谓相当正压状态^[5]。

在式(27)中,若根号前取正号,则有:

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{ur} + \sqrt{\frac{\beta^2}{ur^2} - 4S} \right) \quad (28)$$

若 $\frac{B}{A} < 1$,由式(28)式可解得 $2 \sqrt{\frac{\beta^2}{ur^2} - 4S} < 1 + S$,这一条件比较苛刻,对 ur 有很大限制,实际大气难以实现。

若 $\frac{B}{A} > 1$,由式(28)可解得 $\frac{\beta}{ur} > 1 + S - 2 \sqrt{\frac{\beta^2}{ur^2} - 4S}$,这一条件虽然容易满足,但是,若 $ur \rightarrow 0$ 时, $\frac{B}{A} \rightarrow \infty$,所在在实际大气中也不多见。

若式(27)根号前取负号,有:

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{ur} - \sqrt{\frac{\beta^2}{ur^2} - 4S} \right) \quad (29)$$

这时若 $S > 0$, $\frac{B}{A} > 0$,与文献[5]分析的结果一致。

对于具有相当正压性的波动,如前所述,要求 $\frac{B}{A} < 1$,由式(29)得:

$$\frac{\beta}{ur} > 1 + S - 2 \sqrt{\frac{\beta^2}{ur^2} - 4S} \quad \text{或} \quad \frac{\beta^2}{2ur^2} > k^2 + 1 \quad (30)$$

式(30)即为出现相当正压状态的条件,显然,小的 ur 和小的 k 容易使不等式满足。

若 $\frac{B}{A} > 1$,则由式(29)可解得:

$$2 \sqrt{\frac{\beta^2}{ur^2} - 4S} < 1 + S \quad (31)$$

如前所述,这一条件比较苛刻,在实际大气中此状况难以维持。所以,波动的相当正压状态是大气中常见的稳定状态。

平衡态方程组(23)的稳定性可由式(24)的特征方程

$$\lambda^2(\lambda^2 + \beta^2 + 2aE - 4Su^2) = 0 \quad (32)$$

确定。显然,若 $u^2 < \frac{\beta^2}{4S} + \frac{a}{2}E$,则 $\lambda^2 < 0$,这时方程组(23)是稳定的。对于具有相当正压性的扰动,由式(30)知,要求 $u^2 < \frac{\beta^2}{(1+S)^2}$,这时显然有 $u^2 < \frac{\beta^2}{(1+S)^2} < \frac{\beta^2}{4S} + \frac{a}{2}E$,所以这种波动总是稳定的。

以上讨论的是大气长波问题,对于 $S < 0$ 的短波,对应的平衡态是:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta A - B + ur S (A^2 - \frac{1}{S} B^2) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

和:

$$\begin{cases} \alpha = \pi \\ -\beta A B + u_T S (A^2 - \frac{1}{S} B^2) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

对于平衡态(33), $\alpha = 0$ 表示波振幅随高度增大, 且高低层波动同相或反相。由第二式可解得:

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{u_T} + \sqrt{\frac{\beta^2}{u_T^2} + 4S} \right) \quad (35)$$

这时无论 u_T 多大, 式(35) 都成立。利用式(33), 特征方程可写成:

$$\lambda^2 + 2a \frac{\beta A B}{u_T} + \tilde{\beta}^2 + 4S u_T^2 = 0 \quad (36)$$

这时总有 $\lambda^2 < 0$, 这就是说, 这种短波对称系统, 无论 u_T 怎么大, 它都不会与 u_T 发生相互作用而出现消涨过程。

对于平衡态(34), 可以证明是高低层同相(或反相)的低层系统, 由式(34) 第二式可得:

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\beta}{u_T} + \sqrt{\frac{\beta^2}{u_T^2} + 4S} \right) \quad (37)$$

上式对 u_T 也没有限制, 其特征方程为 $\lambda^2 - (2a A B \frac{\beta}{u_T} - 4S u_T^2 - \tilde{\beta}^2) = 0$ 。有趣的是, 当 u_T 很小时, λ^2 可大于 0, 平衡态难以维持。

5 小 结

本文分析表明:

- (1) 当基本流切变较大时, 波-流间能量交换明显;
- (2) 在较小的基本流切变下, 长波可出现相对稳定的平衡态;
- (3) 斜压不稳定波发展时, 厚度场和流场之间具有制约关系;
- (4) 在斜压大气中, 存在几个守恒量。

参考文献

- [1] Pedlosky j. Chaotic and periodic behavior of finite-amplitude baroclinic waves, J Atmos Sci, 1980, 37: 1177-1196.
- [2] 郑维忠, 余志豪. 非线性斜压不稳定问题中摩擦和对流凝结加热作用. 气象学报, 1987, 45(1): 13- 20.
- [3] 金飞飞, 朱抱真. 大气环流的不连续振荡和指数循环. 气象学报, 1986, 44(1): 38- 46.
- [4] 吴国雄等译. 异常环流与阻塞. 北京, 气象出版社, 1991. 127.
- [5] 杨成彬. 用线性模式分析形成相当正压性的物理因子. 气象学报, 1994, 52(4): 397- 404.

RESEARCH ON THE NON-LINEAR ROSSBY WAVE IN THE BAROCLINIC ATMOSPHERE

Tao Jiejun

(Xiangtan Teachers College, Xiangtan, 411201)

Abstract

Using a two-layer baroclinic quasi-geostrophic model, a nonlinear system including the interaction between the wave and zonal flow is studied. It is shown: (1) The stronger the vertical shearing flow is, the obviouser the energy between wave and flow is. (2) Under the latter vertical shearing flow, the wave may appear equivalent barotropicity. (3) It has a restrictive relation between the flow field and temperature field on the process of development.

Key words: Nonlinear Rossby wave, Energy exchange, Equilibrium state.