

物理守恒律保真格式构造与数值预报斜压 原始方程传统谱模式改进研究^{*}

钟 青

(中国科学院大气物理研究所, 北京, 100029)

摘 要

文中构造并证明了一般二次和三次物理守恒律时间差分保真格式两个构造定理, 以往一些主要时间离散守恒格式构造方案可作为两个定理特例给出。它们不仅可为解决更加广泛类别的时间离散保真格式构造基本问题提供适用数学基础, 而且也结合已有瞬时空离散守恒格式, 解决更加广泛类别的时-空离散意义下保真格式构造基本问题提供适用的数学基础。此外, 文中两个定理还可解决两大类问题的线性和非线性计算不稳定性问题。

斜压原始方程传统半隐式全球谱-垂直有限差分模式目前是世界上许多国家的业务预报和大气环流模式。本工作利用文中新构造定理, 构造并且实现了斜压原始方程全球谱-垂直有限差分模式半隐式高阶全能量守恒方案。以往该项基本问题无论在理论还是实践上长期以来一直都未能得到解决。该项全能量守恒半隐式全球谱模式方案适用于实测资料的长时间数值预报积分。

使用 FGGE 夏季资料进行的 13 个个例 30d 数值积分实验表明: 新型全能量半隐式保真方案可以有效地改进传统预报方案中关于能量质量守恒性质的系统性偏差。值得注意的是, 实验统计分析还显示: 在本文实验条件下, 传统方案中由于时间离散过程中原物理守恒律性质破坏导致的系统误差(简称 Z 类误差), 对于实验总体均方根系统误差的贡献在积分第 2 周可达总量的 1/3, 在 4 周以后可以超过总量的 1/2; 而通过实现半隐式全能量守恒保真格式, 消除相应 Z 类误差, 在积分 2 周后大致可以将传统方案个例预报均方根误差平均减少 1/4, 积分 4 周以后平均减少 1/3 以上。此外, 实验还显示 Z 类误差对于中期乃至月预报的影响并不亚于模式地形的影响作用。新型全能量保真方案表现出的应用潜力十分令人鼓舞。

关键词: 斜压原始方程谱模式, 全能量半隐式保真格式, Z 类系统误差, 物理守恒律, 中期数值预报。

1 引 言

能量与质量等物理守恒律是自然界的基本规律, 描写自然现象的大量科学模型不可避免地包含物理守恒律的内容。对于包含物理守恒律内容的连续意义下建立的科学模型, 在其离散化计算格式中仍然保持原连续问题物理守恒律守恒特征性质是合理可靠数值计

^{*} 初稿时间: 1997 年 2 月 28 日; 修改稿时间: 1997 年 10 月 18 日。

资助课题: 国家自然科学基金项目和国家重点开放实验室 LASG 项目。

算的一个基本约束要求。满足这种要求对于长时间数值积分问题尤为重要。显然,与此相关的系统性误差源汇即使数量级不大乃至很小,其长时间积累效果也将是不可忽视的。鉴于非线性问题,除特殊情形外,无法解析求解,只能离散计算数值求解,因此,此类基本问题往往也是无可回避的。

计算稳定性与计算收敛性问题是计算的基本问题。对于线性模型问题,通过构造相应满足普适线性计算稳定性判据的相容离散计算格式就可以同时保证计算稳定性与收敛性。对于非线性模型问题,目前还找不到能保证非线性计算稳定性的一般判据或方法,也没有稳定性与收敛性的等价性定理。如何合理解决非线性计算不稳定性问题,一直是计算数学界与计算物理界(包括各学科数值计算)工作者尚在致力解决的计算理论基本问题。然而,对于某些类物理守恒律,如一些平方或加权平方守恒律的发展问题,解决相应守恒律全离散计算保持问题本身,也就同时解决了这类问题的线性和非线性计算(不)稳定性问题。

守恒格式构造研究可以追述到本世纪初叶^[1],由于种种原因,虽然国际上已能成功地解决一些瞬时守恒格式的构造问题^[2-12],但是时空全离散意义下的守恒格式的构造,除通常的一阶守恒格式以及其它一些极特殊情形外,长期以来一直未能得到解决,瓶颈问题就是时间离散守恒格式构造。前一阶段,国内先后成功地构造出关于某个特定算子问题的特定的平方守恒性质的(瞬时线性化)隐式和显式时间差分平方守恒格式方案^[13,14],并具体应用这两个方案,通过将正压原始方程气象模型传统形式加以一种变换,分别构造与实现了其(瞬时线性化)隐式与显式时-空差分平方能量守恒格式^[14-16]。但令人惋惜的是它们的适用条件非常严格,无法在正压和斜压原始方程气象学传统形式下直接应用它们构造能量守恒格式,也无法通过变换方法应用它们解决斜压原始方程高阶全能量守恒时间离散格式构造问题,而且尚未涉及半隐式格式构造问题,此外,大家还知道,方程连续意义下等价的变换形式在离散后一般不具等价性。近一阶段,作者构造并且证明了一个半隐式时间差分平方守恒格式构造定理^[17,18];由于作者在构造过程中一些特殊设计,使得该定理同时适用于半隐式、显式以及(瞬时线性化)隐式时间差分格式情况,并且适用于特定算子问题特定平方守恒性质构造问题和非特定算子问题非特定平方守恒性质构造问题。随后构造并且证明的一个半隐式时间差分加权平方守恒格式构造定理以及一个半隐式时间差分更为一般的平方守恒格式构造定理^[19-20]更可以将若干前述定理^[14,17,18]作为特例给出。作者具体应用这些定理,在气象模型传统形式下,先后构造并实现了分别属于和不属于特定算子问题特定平方守恒性质的正压涡度方程显式时间差分-空间谱展开拟能平方守恒格式和动能平方守恒格式^[18,21,22],构造并实现了正压原始方程半隐式时间差分-空间谱展开加权平方能量守恒格式^[21]。利用在建立上述定理过程中形成的一般原理和方法^[19,20],还分别个例地构造实现了正压原始方程半隐式时间差分-空间谱展开拟能和角动量高阶守恒格式^[22,20]。然而,这些定理^[13,14,17-20]也还尚不足以解决斜压原始方程高阶全能量守恒时间离散格式构造问题。本工作一个基本目的是试图具体解决更为广泛的两类问题时间差分隐式、显式和半隐式高阶守恒性质保真格式构造问题,以便进一步拓宽已有的可解决问题的范围,尤其是试图为构造斜压原始方程高阶全能量守恒(半隐式)时间差分格式提供适用的构造定理。

数值天气预报关系国计民生, 无疑具有重大的经济意义与重要的社会意义。自从 1950 年代世界上第一个成功的数值天气预报做出以来^[23], 数值预报模型已从最初采用较简单的正压涡度方程模型发展到今天广泛采用复杂的更加接近实际的斜压原始方程模型; 从最初采用空间导数离散计算效果较差的格点格式, 发展到今天广泛采用可以高精度离散计算空间导数的谱格式; 从最初采用离散计算稳定性条件要求较高计算效率较低的时间差分显式格式, 发展到今天广泛采用离散计算稳定性条件要求较低计算效率较高的时间差分半隐式格式。或许是由于在数值预报发展过程中采用过的一系列复杂程度不同的预报模型中都毫不例外地包含有各种(高阶)物理守恒律内容, 构造相应守恒格式的卓有成效的努力也一直贯穿在其中的每一个发展阶段^[2-22]。然而, 就斜压原始方程问题而言, 虽然国际上以往已能解决其高阶全能量守恒律垂直差分保持格式构造问题^[10-12], 但在此以前, 其高阶全能量守恒律时间差分(离散)保持格式构造这一基本问题, 无论在实践上还是在理论上长期以来一直未能得到解决也无法解决。本工作的另一基本的目的就是具体提供并实现一个斜压原始方程高阶全能量守恒时间差分格式构造方案, 同时也要利用 FGGE(First GARP Global Experiment 1 Dec. 197- 30 Nov. 1979. GARP: Global Atmospheric Research Program) 天气观测资料具体检验其全球谱模式高阶全能量半隐式守恒方案的可行性, 并且探索其应用潜力。

文中第二节将分别构造并证明一般二次物理守恒律及一般三次物理守恒律时间差分保持格式两个构造定理; 第三节将给出斜压原始方程全球谱模式半隐式全能量守恒时间差分格式构造实现方案; 第四节将利用 FGGE 实测天气资料, 设计并进行斜压原始方程全球谱模式半隐式传统方案与全能量守恒方案 13 个个例 30d 数值积分比较实验; 第五节中将对以上工作结果进行简要的总结。

2 物理守恒律保真计算格式构造原理与定理

对于发展问题算子方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 \quad (1)$$

根据按照离散计算误差引入的来源与方式, 在离散计算的每一个计算分量(格点)上, 以保持原连续问题单个或多个特征性质为原则, 对离散计算误差加以相应平均补偿消除的单个或者多个特征性质保真格式一般补偿构造原理和反演构造方法^[19, 20], 式(1)的一般物理守恒律时间差分保真格式可以写为

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + (A^n - A_L^n)u^n + A_L^n u^{n+1} + \Delta t \epsilon^n B^n u^n = 0 \quad (2)$$

这里, 当辅助构造算子 A_L 分别取为算子 A 的线性(化)部分, 零或 A 本身, 则式(2)显然分别为半隐式, 显式或(瞬时线性化)隐式格式; ϵ^n 为可具有多个分量的待定补偿系数; 补偿算子 $B^n u^n$ 可写为

$$B^n u^n = - \sum_{j=1}^J \Delta t^{j-1} \left[\frac{1}{(j+1)!} \frac{\partial^{j+1} u^n}{\partial t^{j+1}} + \epsilon_0 \frac{A_L^n}{j!} \frac{\partial u^n}{\partial t} \right] \quad (J \text{ 是正整数}) \quad (3)$$

ϵ_0 为开关常数可取为 0 或 1, u 的各阶导数可由方程(1) 确定。在实际计算中, 补偿算子可取式(3) 或其近似表达式。辅助构造算子 A_L 的引入^[19-20] 是一个关键所在; 补偿算子 B 的选取很重要。

特别地, 具有一般二次整体守恒性质

$$(A_1 u \quad A_2 A u + A_2 u \quad A_1 A u) d\sigma = 0 \quad (4)$$

或者具有一般三次整体守恒性质

$$(A_1 u \quad A_2 u \quad A_3 A u + A_1 A u \quad A_2 u \quad A_3 u + A_1 u \quad A_2 A u \quad A_3 u) d\sigma = 0 \quad (5)$$

的算子方程(1) 成立如下定理, 这里 A_1, A_2, A_3 均为独立于 u, t 的有界空间算子, $d\sigma$ 为空间积分元。

定理一: 若 n 时刻误差补偿系数满足

$$\epsilon^n = \frac{2C_1}{1 + \sqrt{1 - 4\Delta t^2 C_1 C_2}} \quad (6)$$

则式(2) 为与式(1) 相容的整体二次守恒性质保真格式, 其中, C_1, C_2 分别为 $C(A_1 A^n u^n \quad A_2 A^n u^n + A_1 L u^n \quad A_2 M u^n + A_2 L u^n \quad A_1 M u^n + \Delta t^2 A_1 M u^n \quad A_2 M u^n) d\sigma$ 和 $C(A_1 K B^n u^n \quad A_2 M_1 B^n u^n) d\sigma$; K, L, M 为 $I + \Delta t A_L^n$ 的逆算子, $I - \Delta t A_n, K A_L^n A^n$; C 为 $[A_1(L + \Delta t^2 M) u^n \quad A_2 K B^n u^n + A_2(L + \Delta t^2 M) u^n \quad A_1 K B^n u^n] d\sigma$ 的倒数; I 为单位算子。

证: 利用式(4), 易验证: 若 ϵ^n 满足式(6), 则任意 n 时刻成立

$$(A_1 u^{n+1} \quad A_2 u^{n+1}) d\sigma = (A_1 u^n \quad A_2 u^n) d\sigma \quad (7a)$$

即此时式(2) 为二次整体守恒性质保真格式。又从式(6) 显然有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \epsilon^n = O(\Delta t^0) \quad (7b)$$

即此时式(2) 亦与式(1) 相容。证毕。

作为定理一中的一个特例, 若算子 A_1, A_2 为相同的有界算子, 则一般整体二次守恒性质保真格式退化为一般整体平方守恒性质保真格式^[19,20], 而整体平方守恒格式显然是计算稳定的格式。更为一般的, 关于那些可以令 $A_1 u \quad A_2 u$ 在离散计算空间的每一个离散格点上永远保持为正的二次守恒性质保真格式也显然是计算稳定的格式, 它们计算稳定的充分必要条件均为

$$1 - 4\Delta t^2 C_1 C_2 \quad (8)$$

此外, 作为前述特例的特例, 进一步取 A_1 和 A_2 为单位算子, A_L 为零算子, 则一般整体平方守恒格式进一步退化为关于

$$(u(X, t), A(u(X, t), X, t)) = 0 \quad (9)$$

的某个特殊算子 A 问题的某个特殊平方守恒性质

$$u^{n+1}{}^2 = u^n{}^2 \quad (\text{任意 } n \text{ 时刻}) \quad (10)$$

的时间差分显式完全平方守恒格式^[14]; 对于更为特殊情形, 也就是对于满足式(9) 的特殊算子的特殊平方守恒性质(10) 保持格式构造问题中可作瞬时线性化处理的那一部分即在式(9) 成立的同时

$$(u(X, t), A(u^*, X, t)u(x, t)) = 0 \quad (11a)$$

也成立的那部分问题, 只需简单将待定误差补偿系数置为零, 令 $A_L = \frac{1}{2}A$, 则格式(2) 退化为天然的瞬时线性化隐式完全平方守恒格式

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + A(u^n, X, t) \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = 0 \quad (11b)$$

不妨进一步取 $A(u^n, X, t)$ 为 $A(u^*, X, t)$, 则有一般瞬时线性化隐式完全平方守恒格式^[13, 15, 16]成立如下

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + A(u^*, X, t) \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = 0 \quad (11c)$$

以上, X 表示空间坐标, t 表示时间坐标, u^* 为 u 的任意参考值。其较合理的一个选择是取 $u^* = \theta u^n + (1 - \theta)u^{n+1}$, θ 为权重因子, 实算中 u^{n+1} 可取其估计值替代。

值得注意的是, 格式(11c) 适用条件严格。实际上, 它是双平方守恒格式即格式(11c) 要求对于任意 n 时刻, $u^n{}^2$ 与 $A(u^*, X, t) u^n{}^2$ 守恒。对于那些只满足其中一个平方守恒性质的物理问题, 采用格式(11c) 很难取得理想的效果, 显然, 在这种情况下, 由于虚假的计算性守恒约束存在, 相当于在格式中引入了一个虚假的计算性系统误差源。

格式(11b) A 算子中的变量 u^n 用 $\frac{1}{2}(u^{n+1} + u^n)$ 替换, 则格式即成为全隐式完全平方守恒格式, 也就是著名的克兰克尼科尔森(Crank-Nicholson) 格式。

定理二: 若误差补偿系数满足关系式

$$\Delta t^4 \mathcal{Y}_1(\epsilon^n)^3 + \Delta t^2 \mathcal{Y}_2(\epsilon^n)^2 + \mathcal{Y}_3 \epsilon^n + \mathcal{Y}_4 = 0 \quad (12)$$

且量级为 $O(\Delta t^0)$, 则式(2) 为与式(1) 相容的整体三次守恒性质保真格式。其中,

$$\mathcal{Y}_1 = (A_1 L B^n u^n \quad A_2 L B^n u^n \quad A_3 L B^n u^n) d\sigma \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_2 = & - (A_1 L B^n u^n \quad A_2 L B^n u^n \quad A_3 M u^n + A_1 L B^n u^n \quad A_2 M u^n \quad A_3 L B^n u^n \\ & + A_1 M u^n \quad A_2 L B^n u^n \quad A_3 L B^n u^n) d\sigma \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_3 = & - (A_1 L B^n u^n \quad A_2 M u^n \quad A_3 M u^n + A_1 M u^n \quad A_2 L B^n u^n \quad A_3 M u^n \\ & + A_1 M u^n \quad A_2 M u^n \quad A_3 L B^n u^n) d\sigma \end{aligned} \quad (13c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_4 = & - (A_1 K u^n \quad A_2 A^n u^n \quad A_3 A^n u^n + A_1 A^n u^n \quad A_2 u^n \quad A_3 A^n u^n \\ & + A_1 A^n u^n \quad A_2 A^n u^n \quad A_3 u^n + A_1 L A^n A^n u^n \quad A_2 M u^n \quad A_3 M u^n \\ & + A_1 K u^n \quad A_2 M u^n \quad A_3 L A^n A^n u^n + A_1 K u^n \quad A_2 L A^n A^n u^n \quad A_3 K u^n) d\sigma \quad (13d) \end{aligned}$$

这里, $K = I - \Delta t A^n$, $M = I - \Delta t A^n + \Delta t^2 L A^n A^n$, L 为 $I + \Delta t A^n$ 的逆算子, I 为单位算子。

证: 利用式(5), 易验证: 若 e^n 满足式(12), 则任意 n 时刻成立

$$(A_1 u^{n+1} \quad A_2 u^{n+1} \quad A_3 u^{n+1}) d\sigma = (A_1 u^n \quad A_2 u^n \quad A_3 u^n) d\sigma \quad (14)$$

即此时式(2) 为整体三次守恒性质保真格式, 又从式(11) 显然存在 e^n , 使得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} e^n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-\mathcal{Y}_4/\mathcal{Y}_3) = O(\Delta t^0) \quad (15)$$

即此时式(2) 亦与式(1) 相容。证毕。

作为定理二中的一个特殊情况, 令 A_1 为独立于 u, t 的有界正定算子, A_2 与 A_3 取为相同的独立于 u, t 的有界算子, 则整体三次守恒性质保真格式退化为整体加权平方守恒性质保真格式^[19, 20]。显而易见, 整体加权平方守恒性质保真格式为绝对稳定的计算格式。

在离散计算空间每一个格点上可以使得 $A_1 u \quad A_2 u \quad A_3 u$ 永远为正成立的三次整体守恒性质保真格式显然也是绝对稳定的计算格式。

3 斜压原始方程全球谱-垂直有限差分模式全能量守恒半隐式格式构造方案

3.1 模式控制方程组

取 σ 垂直坐标^[24], $\sigma = p/p_s, p$ 为气压, p_s 为地面气压, 设模式大气中不考虑水汽变化并且模式大气与外界不发生热量交换, 不考虑摩擦作用, 斜压原始方程模式水平球面坐标系下的涡度方程、散度方程、热力学方程、连续方程及静力学方程分别可以写为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial F_v}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial F_u}{\partial \mu} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial F_u}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial F_v}{\partial \mu} + \dots^2 \left(\frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} + \mathcal{Q} \right) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{U}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial T}{\partial \mu} + \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{RT}{c_p} \frac{\omega}{p} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_s}{\partial t} + \dots (v_h p_s) + \frac{\partial \hat{\phi}_s \hat{\sigma}}{\partial \sigma} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial n \sigma} + RT = 0 \quad \text{或} \quad \mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} + RT \quad (20)$$

利用模式大气垂直边界条件 $\sigma = 0$ 和 $\sigma = 1$ 时, $\hat{\sigma} = 0$, 方程(14) 求积分, 可得

$$\frac{\partial \hat{\phi}_s}{\partial t} + \dots^1 (v_h p_s) d\sigma = 0 \quad \text{或者} \quad \frac{\partial n p_s}{\partial t} + \dots^1 (D + v_h \dots^1 \ln p_s) d\sigma = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0^1 \left(D + \frac{v_h}{p_s} \cdot \cdot \cdot p_s \right) - \int_0^\sigma \left(D + \frac{v_h}{p_s} \cdot \cdot \cdot p_s \right) d\sigma \\ &= \sigma_0^1 \left(D + v_h \cdot \cdot \cdot \ln p_s \right) - \int_0^\sigma \left(D + v_h \cdot \cdot \cdot \ln p_s \right) d\sigma \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{p} &= \frac{1}{p_s} v_h \cdot \cdot \cdot p_s - \frac{d \ln \sigma}{d \sigma} \int_0^\sigma \left(D + \frac{v}{p_s} \cdot \cdot \cdot p_s \right) d\sigma \\ &= v_h \cdot \cdot \cdot \ln p_s - \frac{d \ln \sigma}{d \sigma} \int_0^\sigma \left(D + v_h \cdot \cdot \cdot \ln p_s \right) d\sigma \end{aligned} \quad (23)$$

其中, t 为时间; λ, θ 为地球经纬度; $\mu = \sin \theta$, u, v 分别为水平矢量风 v_h 在经纬度上的分量, u 沿纬圈向东为正, v 沿经圈向北为正; T 为绝对温度, $\zeta = \cdot \cdot \cdot^2 \Psi$ 为相对涡度的垂直分量, $D = \cdot \cdot \cdot^2 \chi$ 为水平散度, $\mathcal{Q} = (gz)$ 位势高度, $\hat{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ 为 σ 面垂直速度, $\hat{\omega} = \frac{dp}{dt}$ 为 p 面垂直速度, Ψ 为流函数, χ 为速度势, z 为高度, $\cdot \cdot \cdot$ 为水平梯度算子, $\cdot \cdot \cdot^2$ 为水平拉普拉斯算子, 并且

$$Fu = V(f + \zeta - \hat{\sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma} - \frac{RT}{a} \frac{\partial \ln p_s}{\partial \lambda}) = V(\zeta + f) - \hat{\sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma} - \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{a \partial \lambda} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} Fv &= -U(f + \zeta - \hat{\sigma} \frac{\partial V}{\partial \sigma} - \frac{RT}{a} (1 - \mu^2) \frac{\partial \ln p_s}{\partial \mu}) \\ &= -U(\zeta + f) - \hat{\sigma} \frac{\partial V}{\partial \sigma} - \frac{RT}{p_s} (1 - \mu^2) \frac{\partial p_s}{a \partial \mu} \end{aligned} \quad (25)$$

$$U = u \cos \theta = \frac{1}{a} \left[- (1 - \mu^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} + \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} \right] \quad (26)$$

$$V = v \cos \theta = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + (1 - \mu^2) \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right] \quad (27)$$

科氏 (Coriolis) 参数 $f = 2 \sin \theta$, Ω 为地球自转角速度, a 为地球半径, R 和 c_p 分别为干空气的气体常数和定压比热。可以验证, 对于斜压原始方程组 (16–20) 描述的运动恒有三次高阶全能量全球整体积分守恒性质

$$\iint_s \int_0^1 \sigma^p (\mathcal{Q} + c_p T + \frac{U^2 + V^2}{2(1 - \mu^2)}) d\sigma ds = \text{常量} \quad (28)$$

存在。这里 \mathcal{Q} 为地表位势高度, ds 球面积分元, s 为全球总面积。

3.2 全球谱-垂直有限差分模式传统半隐式方案

以 ζD , T , $\ln p_s$ 为预报量, \mathcal{Q} 为诊断量, 对散度、温度和地面气压采用半隐式时间积分格式^[25]并引进时间滤波^[26]用以防止计算波虚假增长的斜压原始方程全球谱-垂直有限差分模式半隐式传统方案可以写为

$$\delta_t \zeta_{m,l,k} + ZT_{m,l,k} = 0 \quad (29)$$

$$\delta_t D_{m,l,k} + DT_{m,l,k} + [\cdot \cdot \cdot^2 (\frac{U^2 + V^2}{2(1 - \mu^2)}) + \mathcal{Q}_{m,l,k}]$$

$$+ \dots^2 \left[\sum_{j=k+1}^{NL} R \Delta u T_j \ln \frac{\sigma_{j+\frac{1}{2}}}{\sigma_{j-\frac{1}{2}}} + \alpha R \Delta u T_k + R T_0 \Delta u \ln p_s \right]_{m,l} = 0 \quad (30)$$

$$\delta T_{m,l,k} + T T_{m,l,k} + \frac{R T_0}{c_p} \left(\frac{\ln \sigma_{k+\frac{1}{2}} / \sigma_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \sigma_k} \sum_{j=1}^{k-1} D_j \Delta \sigma_j + \alpha \Delta u D_k \right)_{m,l} = 0 \quad (31)$$

$$\delta (\ln p_s)_{m,l} + P T_{m,l} + \sum_{j=1}^{NL} \Delta u D_j \Delta \sigma_j = 0 \quad (32)$$

其中, $X_{m,l,k}$ 为 k 层变量 X 以球谐函数 $p_l^m(\mu) e^{im\lambda}$ 为基函数的谱展开系数, 算子 $\delta, \Delta u$ 分别为 $\delta X = (X^+ - X^-) / 2\Delta t$, $\Delta u X = (X^+ + X^-) / 2 - X$, 这里 X 表示 t 时刻某变量值, X^+ 表示 $t + \Delta t$ 时刻变量值, X^- 表示 $t - \Delta t$ 时刻经时间滤波后变量值, 变量 X 当前 t 时刻滤波值 X_f 是经 (29) - (32) 向前积分一次, 通过 $X_f = X + \mathcal{G}(X^- - 2X + X^+)$ 获得的。这里 X 可以是预报量 $\zeta, D, T, \ln p_s$ 。任意 k 层谱系数 $Z T_{m,l,k}, D T_{m,l,k}, T T_{m,l,k}$ 和 $P T_{m,l}$ 是在求出当前 t 时刻三维计算空间每一个格点上非线性项 $Z T, D T, T T$ 和 $P T$ 相应数值以后直接通过格谱变换获得的。 T_0 为参考温度。这里,

$$Z T_k = - \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial (Fv)_k}{\partial \lambda} + \frac{\partial (Fu)_k}{a \partial \mu} \quad (33a)$$

$$D T_k = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial (Fu)_k}{\partial \lambda} - \frac{\partial (Fv)_k}{a \partial \mu} + \dots^2 \left(\frac{U_k^2 + V_k^2}{2(1-\mu^2)} + \mathcal{Q}_k \right) \quad (33b)$$

$$T T_k = \frac{U_k}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial T_k}{\partial \lambda} + \frac{V_k}{a} \frac{\partial T_k}{\partial \mu} + \left(\sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_k - \frac{R T_k}{c_p} \left(\frac{\omega}{p} \right)_k \quad (33c)$$

$$P T = \sum_{j=1}^{NL} (v_{hj} \dots \ln p_s + D_j) \Delta \sigma_j \quad (33d)$$

$$(Fu)_k = V_k (\zeta + f) - \left(\sigma \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right)_k - R T_k \frac{\partial \ln p_s}{a \partial \lambda} \quad (33e)$$

$$(Fv)_k = - U_k (\zeta + f) - \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right)_k - R T_k (1-\mu^2) \frac{\partial \ln p_s}{a \partial \mu} \quad (33f)$$

不妨将整层大气分为 NL 层, 将预报量 ζ, D, T 定义在垂直有限差分分层整数层, σ 定义在垂直分层半层分界面上, 在模式大气上下边界定义 $\sigma_{\frac{1}{2}} = \sigma_{NL+\frac{1}{2}} = 0$, 其它半层格点上 σ 面垂直速度 $\hat{\sigma}_{k+\frac{1}{2}}$ 由 (22) 离散化形式确定如下:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{k+\frac{1}{2}} &= \alpha_{k+\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{NL} (D_j + v_{hj} \dots \ln p_s) \Delta \sigma_j \\ &- \sum_{j=1}^k (D_j + v_{hj} \dots \ln p_s) \Delta \sigma_j \quad (k = 1, 2, \dots, NL-1) \end{aligned} \quad (34)$$

通过静力关系式 (20) 垂直有限差分离散化形式可以将整层与半层分界面上 \mathcal{Q} 定义如下

$$\mathcal{Q} = \frac{\mathcal{Q}_{k+\frac{1}{2}} \sigma_{k+\frac{1}{2}} - \mathcal{Q}_{k-\frac{1}{2}} \sigma_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \sigma_k} + R T_k = \mathcal{Q}_{k+\frac{1}{2}} + \alpha_k R T_k \quad (35a)$$

$$\mathcal{Q}_{k+\frac{1}{2}} = \mathcal{Q}_{k-\frac{1}{2}} - RT_k \ln \sigma_{k+\frac{1}{2}} / \sigma_{k-\frac{1}{2}} = \mathcal{Q} + \sum_{j=k+1}^{NL} RT_j \ln \sigma_{j+\frac{1}{2}} / \sigma_{j-\frac{1}{2}} \quad (35b)$$

$$\alpha_k = 1 - \frac{\sigma_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \sigma_k} \ln \sigma_{k+\frac{1}{2}} / \sigma_{k-\frac{1}{2}} \quad (35c)$$

若将整数层上的变量 X 垂直平流项定义为

$$\left(\hat{\sigma} \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)_k = \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}_{k+\frac{1}{2}} \frac{X_{k+1} - X_k}{\Delta \sigma_{k+\frac{1}{2}}} + \hat{\sigma}_{k-\frac{1}{2}} \frac{X_k - X_{k-1}}{\Delta \sigma_{k-\frac{1}{2}}} \right) \quad (36)$$

这里 X 可以取 T, U 和 V 。进一步取 p 面上垂直速度 ω 满足

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{p} \right)_k &= v_{h_k} \dots \ln p_s - \alpha_k (D_k + v_{h_k} \dots \ln p_s) \\ &\quad - \frac{\ln \sigma_{k+\frac{1}{2}} / \sigma_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \sigma_k} \sum_{j=1}^k (D_j + v_{h_j} \dots \ln p_s) \Delta \sigma_j \end{aligned} \quad (37)$$

则可以验证, 式(35)–(37)的成立可以保证垂直差分不出现虚假的能量源与汇。若定义 $\sigma_{\frac{1}{2}} = 0$, 则有 $\sigma = 0$ 可进一步保证垂直差分不出现虚假的角动量源与汇^[27]。

以上传统方案中的时间差分半隐式格式是三层格式, 存在虚假的计算波, 为防止它们的虚假增长不得不引入人工滤波加以处理, 这总是一个缺陷, 更为重要的是这种方案无法保证时间差分过程中不出现虚假的能量源与汇。

3.3 全球谱-垂直有限差分模式的半隐式全能量守恒方案

根据一般的物理守恒律保真格式构造原理与方法, 斜压原始方程组(16)–(20)垂直差分全球谱模式半隐式全能量守恒方案可以构造如下

$$(\mathcal{C}_{ml,k}^{n+1} - \mathcal{C}_{ml,k}^n) / \Delta t + ZT_{ml,k}^n + \epsilon_n (B^n \mathcal{C})_{ml,k} = 0 \quad (38)$$

$$(D_{ml,k}^{n+1} - D_{ml,k}^n) / \Delta t + DT_{ml,k}^n + [\dots]^2 \left(\frac{U^2 + V^2}{2(1 - \mu^2)} + \mathcal{Q} \right)_{ml,k}^n + \beta_0 \sum_{j=k+1}^{NL} R(T_j^{n+1} - T_j^n)$$

$$\ln \sigma_{j+\frac{1}{2}} / \sigma_{j-\frac{1}{2}} + \alpha R(T_k^{n+1} - T_k^n) + \frac{RT_0}{p_0} (p_s^{n+1} - p_s^n)_{ml} + \epsilon_n (B^n D^n)_{ml,k} = 0 \quad (39)$$

$$(T_{ml,k}^{n+1} - T_{ml,k}^n) / \Delta t + TT_{ml,k}^n + \beta_0 \frac{RT_0}{c_p} \left[\frac{\ln \sigma_{k+\frac{1}{2}} / \sigma_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \sigma_k} \sum_{j=1}^{k-1} (D_j^{n+1} - D_j^n) \Delta \sigma_j \right.$$

$$\left. \alpha (D_k^{n+1} - D_k^n) \right]_{ml} + \epsilon_n (B^n T^n)_{ml,k} = 0 \quad (40)$$

$$(P_s^{n+1} - P_s^n) / \Delta t + PT_{ml}^n + \beta_0 p_0 \left(\sum_{j=1}^{NL} D_j \Delta \sigma_j \right)_{ml} + \epsilon_n (B^n P_s^n)_{ml} = 0 \quad (41)$$

这里, T_0, P_0 分别为参考温度与参考地面气压, β_0 为开关常数为 0 或 1, 当 β_0 为 0 时, 计算方案(38)–(41)为显式方案, 为 1 时是半隐式方案, 并且

$$ZT = - \frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial Fv}{\partial \lambda} + \frac{\partial Fu}{a \partial \mu} \quad (42a)$$

$$DT = - \frac{1}{a(1 - \mu^2)} \frac{\partial Fu}{\partial \lambda} - \frac{\partial Fv}{a \partial \mu} + \dots^2 \left(\frac{U^2 + V^2}{2(1 - \mu^2)} + \mathcal{Q} \right) \quad (42b)$$

$$TT = \frac{U}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial T}{\partial \mu} + \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{RT_k}{c_p} \frac{\omega}{p} \quad (42c)$$

$$PT = \sum_{j=1}^{NL} (v_{hj} \dots p_s + p_s D_j) \Delta \sigma_j \quad (42d)$$

$$Fu = V(\zeta + f) - \sigma \frac{\partial U}{\partial \sigma} - \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{a \partial \lambda} \quad (43a)$$

$$Fv = -U(\zeta + f) - \sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma} - \frac{RT}{p_s} (1 - \mu^2) \frac{\partial p_s}{a \partial \mu} \quad (43b)$$

这里, σ 面垂直离散化是采用如下方式, 整层大气垂直方向分为 NL 个整层, $NL + 1$ 个半层分界面, 边界条件取为 $\sigma_{\frac{1}{2}} = \sigma_{NL+\frac{1}{2}} = 0$, 基本预报量 ζ, D, T 是定义在整层上, σ 通过式 (22) 垂直离散化形式定义在半层格点空间上

$$\hat{\sigma}_{k+\frac{1}{2}} = \sigma_{k+\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{NL} (D_j + \frac{v_{hj}}{p_s} \dots p_s) \Delta \sigma_j - \sum_{j=1}^k (D_j + \frac{v_{hj}}{p_s} \dots p_s) \Delta \sigma_j$$

$$(k = 1, 2, \dots, NL - 1) \quad (44)$$

通过静力关系式 (20) 离散化形式可以将 φ 同时定义在整层与半层格空间上, 具体为

$$\varphi_k = \frac{\varphi_{k+\frac{1}{2}} \sigma_{k+\frac{1}{2}} - \varphi_{k-\frac{1}{2}} \sigma_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \sigma_k} + RT_k = \varphi_{k+\frac{1}{2}} + \alpha_k RT_k \quad (45a)$$

$$\varphi_{k+\frac{1}{2}} = \varphi_{k-\frac{1}{2}} - RT_k \ln \sigma_{k+\frac{1}{2}} / \sigma_{k-\frac{1}{2}} = \varphi_k + \sum_{j=k+1}^{NL} RT_j \ln \sigma_{j+\frac{1}{2}} / \sigma_{j-\frac{1}{2}} \quad (45b)$$

$$\alpha_k = 1 - \frac{\sigma_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \sigma_k} \ln \sigma_{k+\frac{1}{2}} / \sigma_{k-\frac{1}{2}} \quad (46)$$

将变量 $X = \{U, V, T\}$ 整数层上的垂直平流项定义为

$$(\sigma \frac{\partial X}{\partial \sigma})_k = \frac{1}{2} (\sigma_{k+\frac{1}{2}} \frac{X_{k+1} - X_k}{\Delta \sigma_{k+\frac{1}{2}}} + \sigma_{k-\frac{1}{2}} \frac{X_k - X_{k-1}}{\Delta \sigma_{k-\frac{1}{2}}}) \quad (47)$$

取 p 面上垂直速度 ω 满足

$$(\frac{\omega}{p})_k = \frac{v_{hk}}{p_s} \dots p_s - \alpha_k (D_k + \frac{v_{hk}}{p_s} \dots p_s) - \frac{\ln \sigma_{k+\frac{1}{2}} / \sigma_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \sigma_k} \sum_{j=1}^k (D_j + \frac{v_{hj}}{p_s} \dots p_s) \Delta \sigma_j \quad (48)$$

则可以验证, 式 (45a, b), (47) 和 (48) 同时成立, 可以保证垂直有限差分过程中不出现虚假的能量源与汇, 若定义 $\sigma_{\frac{1}{2}} = 0$ 则有 $\alpha_k = 1$, 从而可以进一步保证垂直有限差分过程中不出现虚假的角动量源与汇。

通过式 (35a)、(36) 和 (37) 将 $\varphi, \sigma \frac{\partial U}{\partial \sigma}, \sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma}$ 和 $\frac{\omega}{p}$ 在整层格点上定义, 已经可以求得 ZT, DT, TT 任意整层垂直分层上的格点值。由于模式的基本变量 ζ, D, T 和 p_s 以及地表位势 φ 在水平方向上均可以表示为球谐函数的有限级数

$$X(\lambda, \mu, \sigma, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{l=m}^M X_M P_l^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (49)$$

这里, 水平离散化截谱采用的是三角形截断, 最大截断波数 M ; 球面网格纬圈上采用 $Nl = 3M + 1$ 等距分布格点, 经圈上采用 $Nj = 3M + 1/2$ 的不等距高斯格点, 以求最高效率地保证水平离散的计算精度^[28, 29]。利用式(49) 求出 n 时刻格点上 ζ, D, T 和 p_s , 进一步利

用球谐函数一些基本性质 $(\frac{\partial X}{\partial \lambda})_m = imX_m, (\frac{\partial X}{\partial \mu})_m = \sum_{l=m}^M X_{ml} \frac{dP_l^m}{d\mu}, X(\lambda, \mu, \sigma, t) = \sum_{m=-M}^M X_m(\mu, \sigma, t) e^{im\lambda}, \dots, P_l^m(\mu) e^{im\lambda} = -\frac{l(l+1)}{a^2} P_l^m(\mu) e^{im\lambda}$ 等可以求得 $U, V, \frac{\partial T}{\partial \lambda}, \frac{\partial T}{\partial \mu}, \frac{\partial p_s}{\partial \lambda}, \frac{\partial p_s}{\partial \mu}$ 乃至 Fu, Fv, ZT, DT, TT 和 PT 水平网格上的格点值, 进而利用

$$X_{m,l,k} = \sum_{i=1}^{Nl} \sum_{j=1}^{Nj} w(\mu_j) X(\lambda_i, \mu_j, \sigma_k, t) P_l^m(\mu_j) e^{-im\lambda_i} \quad (50)$$

求得 $ZT_{m,l,k}, DT_{m,l,k}, TT_{m,l,k}$ 和 $PT_{m,l,k}$ 。这里, $w(\mu)$ 为高斯权重因子。显然, 方程组(38) — (41) 既可以写在谱空间也可以写在格点空间, 直接应用第二节定理二, 可以获得方程

$$\Delta t^4 \mathcal{Y}_1(\epsilon^n)^3 + \Delta t^2 \mathcal{Y}(\epsilon^n)^2 + \mathcal{Y}_3 \epsilon^n + \mathcal{Y}_4 = 0 \quad (51)$$

通过求解(51) 中 ϵ^n 量级数为 $O(\Delta t^0) = O(1)$ 的解, 可以保证三次高阶全能量全球积分整体守恒性质在半隐式(或显式) 时间差分离散计算过程中不被破坏, 也就是可以保证时间差分不出现虚假的能量源和汇。本方案是二层时间差分格式, 无传统三层格式中虚假的计算波分量存在, 因此无需人工滤波平滑处理。

4 斜压原始方程全球谱-垂直有限差分模式半隐式传统方案与半隐式全能量守恒方案实时资料中期预报比较实验

4.1 实验设计

(1) 本工作试图进一步采用未经初始化处理 FGGE 夏季实时资料进行月积分动力预报实验, 以考察半隐式全能量守恒方案在更加接近实际的复杂情况下长时间积分的可行性, 同时也是考察方案在长时间积分运行中保持高阶全能量物理守恒律实际能力。以往, 曾分别采用相对简化正压涡度方程显式能量、拟能守恒方案和正压原始方程模型的半隐式能量拟能守恒方案在理想情况下进行过长时间可行性检验, 效果令人满意^[18, 21, 22]。

(2) 这里试图进一步采用在相同理想平坦地形相同实时资料初值条件下进行半隐式传统方案与半隐式全能量守恒保真方案月积分动力预报比较实验, 以考察在多个有气象学背景(系统) 误差源同时存在又更加接近实际的复杂情况下, 与高阶全能量守恒性质在时间差分离散过程中不能得到保持相联系的系统误差(简称 Z 类系统误差) 源汇对于总体系统误差及总体误差的贡献, 同时也是考察通过构造全能量守恒(半隐式) 保真方案消除此类相应的系统误差改进中期乃至月预报的可能性与潜力。以往, 曾分别采用相对简化的正压涡度方程模型显式能量守恒方案和正压原始方程模型的半隐式能量守恒方案, 在理想情况下, 与相应传统格式进行过性能比较实验。长时间积分后的结果差异非常明显^[18, 21, 22]。

由于在进行上述比较实验的模式中没有包括纯动力过程以外的大气中任何其它内部

物理过程,没有包括真实下垫面地形条件以及采用的初始资料没有进行过任何初始值化处理,因此也远远不是完善的大气初值。此种情况下,在全能量守恒保真计算方案模型中无疑存在着相应的几个虚假的系统性误差源汇。如果以全能量守恒保真计算方案为比较基准,在传统方案模型中可以认为除了保真计算方案中那些系统误差源以外,还额外存在一个与时间半隐式差分过程全能量守恒关系不能得到保持相联系的 Z 类系统误差源汇。

此外,传统观念认为,时间离散误差与空间离散误差相比,较小不重要,其影响似可忽略^[30]。本工作之所以在实验中保留地形这样明显的大误差源存在,也是为了考察在与有明显气象学意义的大误差源同时共存时,其影响是不是真的会被淹没。

(3) 进一步进行传统半隐式方案有地形的相应数值积分实验,以便粗略估计在传统方案中通过消除某种 Z 类系统误差源汇所获得的改进与把完全虚假的平坦地形用近似真实的地形资料来替代从而消除相应的地形系统误差(简称 T 类系统误差)源汇之后所获得的改进的相对大小,估价两者的相对重要性。如果以包括模式地形资料的传统计算方案为比较基准,理想化平坦地形情形下传统方案可以看作是除了有模式地形方案中存在的那些系统误差源汇以外还另外存在一个由于把模式中能够大致描述地球表面地形的模式地形数据用相比之下大大偏离实际的完全理想化平坦地形替代引入的 T 类系统误差源汇。

4.2 实验资料

本文工作采用斜压原始方程全球谱-垂直有限差分模式包括理想平坦地形的半隐式全能量守恒方案、包括理想平坦地形及包括实际模式地形的半隐式传统方案分别进行了 3 组动力月预报积分实验;其中的每一组都包括相同的 13 个个例积分。这 13 个积分分别是以未经过初始值处理的 1979 年夏季的 6 月 1 日、6 月 5 日、6 月 10 日、6 月 15 日、6 月 20 日、6 月 25 日、7 月 1 日、7 月 5 日、7 月 10 日、7 月 15 日、7 月 20 日、7 月 25 日和 8 月 1 日的 FGGE 资料为积分初值。

在计算中,全球谱-垂直有限差分半隐式方案均取垂直分层 NL 为 9,最大三角截断波数 M 为 42,时间积分步长 Δt 为 30 min,纬圈上等距格点数 NI 为 128,经圈上不等距高斯格点数 NJ 为 64。此外,传统方案中时间滤波参数 ϵ_i 均取为 0.05。

4.3 实验结果

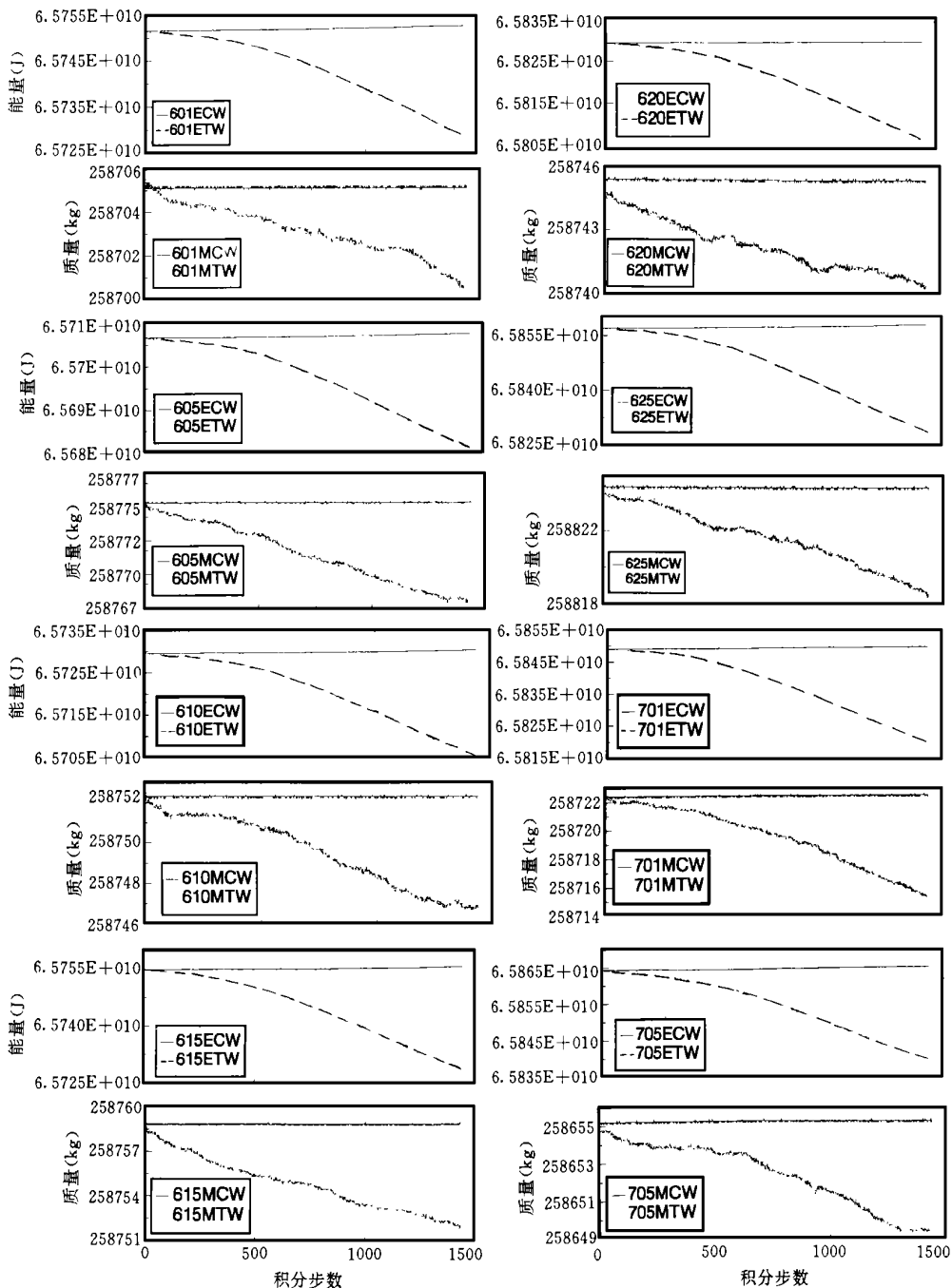
(1) 可行性与基本性能改进

传统与保真方案 13 个个例 30 d 数值积分比较实验的每一个(见图 1)均显示:新型保真方案基本性能改进是明显的,新方案可以显著地纠正传统方案对高阶全能量与质量全球积分守恒性质的偏离,虽然这种随着积分时间呈单调增长趋势的偏离在月积分时间尺度上数量级上并不大,以积分第 30 天偏差为例,这些偏差相对于守恒量本身大约仅占万分之几。此外,图 1 显示结果无疑还表明无需采用可能带来一些副作用的人工平滑稳定性措施,保真方案就可以长时间平稳地积分下去。本工作建立的定理二可以适用于解决斜压原始方程全球谱-垂直有限差分模式半隐式全能量守恒方案构造这一基本问题;采用定理二构造的新型半隐式全能量守恒保真方案可以适用于采用(未经特殊处理的)实时资料进行的长时间数值积分预报。

(2) Z 类与 T 类误差对于预报总系统误差的贡献

多个个例平均预报场的误差, 代表了模式总误差的一个重要方面。文中预报场的系统误差就是指文中夏季13个个例30 d 预报场逐日加以平均得到的30 d “平均”预报场的误差。

比较相同条件下包括与不包括模式地形传统半隐式方案500 hPa 位势高度平均场的



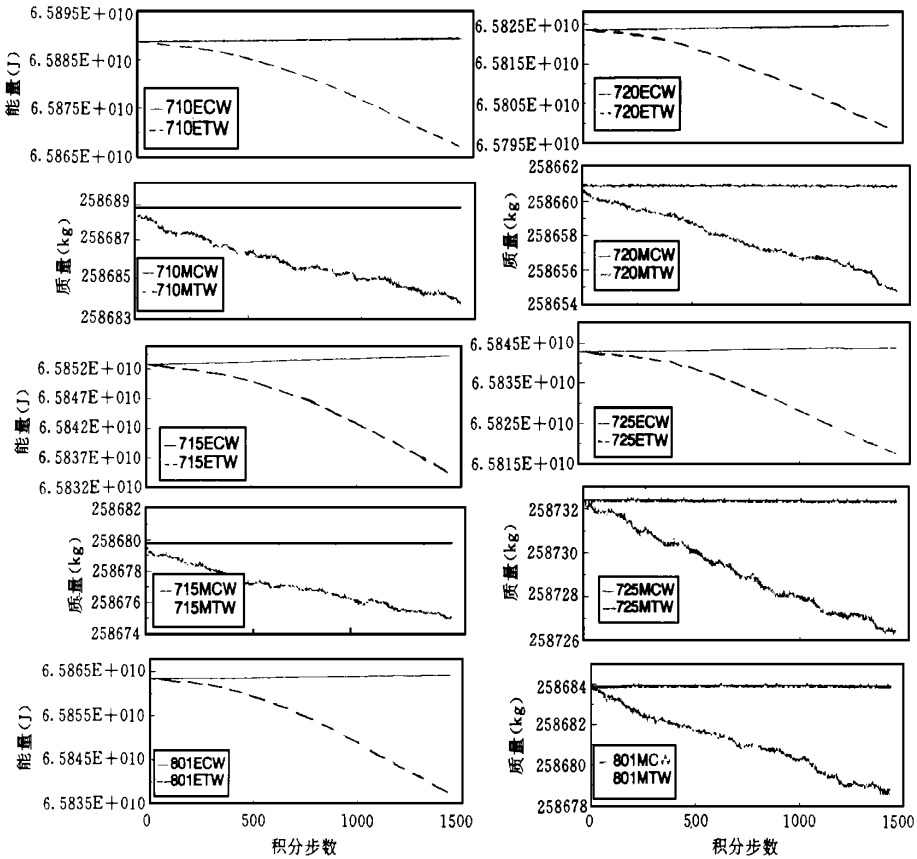


图1 原始方程模型全能量与质量全球积分守恒量30 d (1979年夏季) 积分变化比较曲线 (图中数字表示月、日, 如601表示6月1日, 715表示7月15日。曲线ECW: 新型保真方案中全能量全球积分守恒量计算演变; ETW: 传统方案中全能量全球积分守恒量计算演变; MCW: 新型保真方案中质量全球积分守恒量计算演变; MTW: 传统方案中质量全球积分守恒量计算演变)

均方根误差发展曲线, 可以看到, T 类系统误差对总体均方根系统误差的贡献毋庸置疑是十分显著, 在积分到第2周结束时已大致可达均方根系统误差总额1/3, 在积分第4周以后更可达到其总额2/5(参见图2)。

比较相同条件下全能量保真与传统半隐式方案500 hPa 位势高度平均场的均方根误差发展曲线, 不难发现: Z 类系统误差对总体均方根系统误差的贡献在积分到第2周结束时已大致可达均方根系统误差总额1/3, 在积分第4周以后更可超过总额1/2(参见图2)。

统计结果还显示, 通过考察无地形的保真方案和有地形的传统方案的均方根误差发展水平, 很容易看到, 在积分的第15天以后, 前者要好于后者(参见图2)。这表明, 至少从某种意义上, 就系统误差而言, Z 类系统误差的影响并不亚于 T 类误差。

如果说在延伸预报时段的这种系统误差可以在一定意义下反映与模式气候漂移现象相关联的模式气候系统误差, 那么通过构造全能量守恒保真方案消除相应 Z 类系统误差

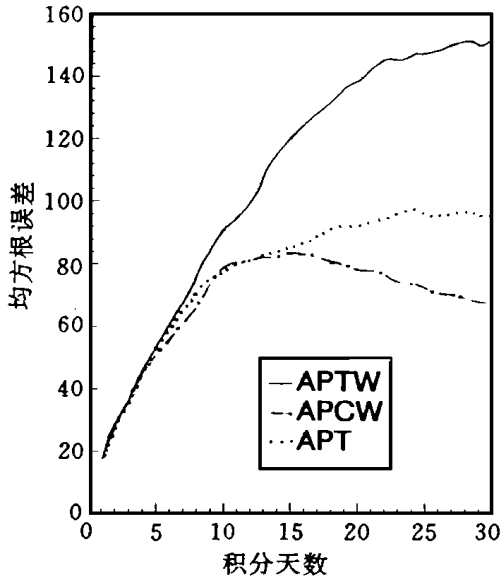


图2 13个个例500 hPa 高度预报场的平均场均方根误差30 d 演变比较曲线 (APTW: 采用理想化平坦地形的传统方案, APCW: 采用理想化平坦地形的新型保真方案, APT: 采用真实模式地形的传统方案)

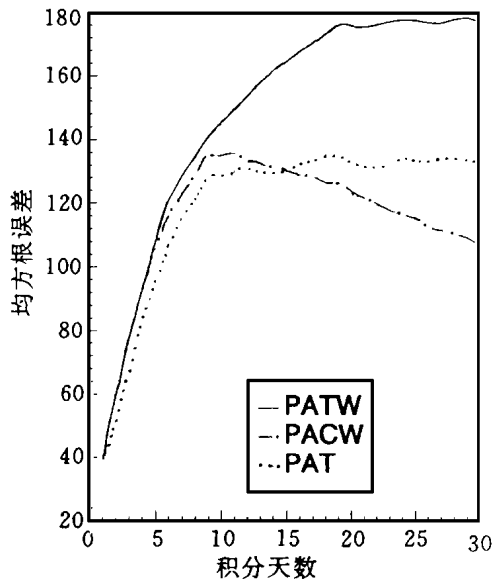


图3 13个个例500 hPa 高度预报场均方根误差平均值30 d 演变比较曲线 (PATW: 采用理想化平坦地形的传统方案, PACW: 采用理想化平坦地形新型保真方案, PAT: 采用真实模式地形传统方案)

这一新途径为解决气候漂移问题做显著的贡献也不是不可能的。

(3) 预报总体误差的平均改进

多个个例预报误差的平均, 代表了模式总体预报误差的平均水平。

以不包括模式地形传统半隐式方案 A 的 13 个 30 d 预报积分个例 500 hPa 位势高度均方根误差的每日平均值为基准, 可以看到: 在有多个系统误差源汇同时起作用的情况下, 通过构造全能量守恒保真方案 B 消除方案 A 中相应 Z 类系统误差以后所获得的均方根总体误差平均的改进, 在积分 2 周以后已将近达到均方根系统误差总额 1/4, 在积分 4 周以后更可达到其总额 1/3 以上 (参见图 3), 反映出方案 B 的巨大潜力; 实际上, 与通过加入模式地形 (简称方案 C) 消除方案 A 相应 T 类系统误差所获得的均方根总体误差平均的改进效果相比较, 通过方案 B 所获得的改进仅仅是在积分的第 15 天以后才超过方案 C, 在此以前明显要逊于前者 (参见图 3), 这反映出方案 B 的优势主要在长期数值积分方面。

预报效果大幅度改进同样可以清楚地从扣除掉相应观测场后的预报位势高度场本身比较上得到验证。图 3 显示: 在积分的第 30 天, 对于方案 A 所有 13 个个例的偏差, 平均来讲, 其最大负的 (也是全球绝对值最大) 误差中心, 在南极方案 B 减少 70% 以上, 方案 C 减少不超过 45%; 最大正的误差中心在南半球中纬度, 方案 B 减少 25%, 方案 C 减少 0%; 在北半球中纬度的最大正的误差中心方案 B 与方案 C 均减少 25%; 而其在北极最大负的误差中心, 方案 B 减少不到 20%, 方案 C 极值减少超过 65%。方案 C 在北半球的表现超过了方案 B, 但是方案 B 在南半球的表现超过了方案 C。这是南北半球实际地表地形显著差异

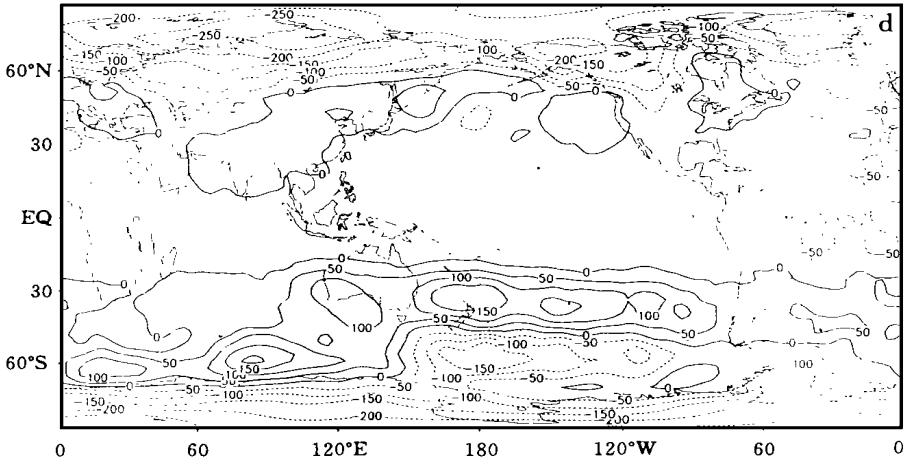


图4 13个个例预报第30天500 hPa 高度预报场的平均场等值线图

(a. 相应分析场; b. 传统方案(理想平坦地形)预报场扣除相应分析场; c. 传统方案(真实模式地形)预报场扣除相应分析场; d. 全能量保真方案(理想平坦地形)预报场扣除相应分析场)

的一个合理反映。两者误差在结构框架及细节上的明显差异也是对于两类误差源性质与作用方式截然不同的一个合理反映。总体上看,在积分的第30天,方案B在全球的表现确实还是超过了方案C。这与均方根误差统计结果也是有一致性的。

5 总 结

物理守恒律是自然界的基本规律,在离散计算时仍然保持物理守恒律的性质是合理可靠的离散计算的基本要求,由于正如文中第二节已经推导过的,基本上可以将已知的一些主要物理守恒律的时间离散守恒格式的构造方案作为本文提出并证明的一般二次和三次物理守恒律时间差分保真格式的两个构造定理的特例给出,因此,这两个数学定理的成功构造与证明无疑可大大拓宽已往可以解决时间离散守恒格式构造问题的范围,为解决更加广泛类别的高阶物理守恒律时间离散保真格式构造,特别是斜压原始方程三次全能量半隐式守恒保真计算格式构造问题提供了新的数学基础。从而也为在已有构造瞬时空间离散守恒格式基础上进一步解决更加广泛类别的时-空全离散高阶物理守恒律完全守恒提供新的基础与新的可能。例如,在以往著名的涡度方程二次平方动能和拟能瞬时空间差分守恒格式^[2]基础上,应用定理一可以分别构造以往无法构造的涡度方程时-空差分全离散意义下二次平方动能和二次平方涡度拟能守恒格式;在以往著名的浅水波方程高阶能量瞬时空间差分守恒格式^[9]基础上,应用定理二可以构造以往无法构造的浅水波方程时-空差分全离散意义下的高阶能量完全守恒格式;等等。此外,本文两个构造定理也可以为彻底解决具有整体平方或加权平方等等守恒性质问题的线性和非线性时间离散计算稳定性问题提供数学基础,并且结合已有瞬时整体平方或加权平方格式,也可以为彻底解决具有相应整体守恒性质问题的线性和非线性时-空离散计算不稳定性问题提供数学基础。

斜压原始方程传统半隐式全球谱垂直有限差分模式目前是世界上许多国家的业务预

报模式和气候大气环流模式。由于种种原因,斜压原始方程半隐式全能量守恒格式构造问题却是长期得不到解决。本文工作还表明,本文构造的保真格式构造定理二确实适用于斜压原始方程高阶全能量守恒格式构造问题的解决;采用定理二方案构造实现的斜压原始方程全球谱垂直有限差分模式半隐式全能量守恒格式方案也确实适用于实时资料的长时间的数值预报积分。

使用 FGGE 资料进行的 13 个个例的夏季月积分数值预报实验结果表明:新型全能量半隐式保真方案确可以有效地改进传统方案预报方案对于高阶全能量以及质量整体物理守恒性质的系统性偏离。尤其值得注意的是实验统计分析还显示:在本文实验条件下,传统方案中由于时间离散过程对于物理守恒律性质的破坏导致的 Z 类系统误差对于实验总体均方根系统误差的贡献在积分 2 周结束时可达总量的 $1/3$, 4 周以后可以超过总量的 $1/2$; 而通过实现半隐式全能量守恒保真格式,消除相应 Z 类误差,在积分 2 周结束时大至可以将传统方案个例预报均方根误差平均减少 $1/4$, 积分 4 周以后平均减少 $1/3$ 以上。斜压原始方程高阶全能量半隐式守恒格式在改进中期乃至月预报方面的应用潜力很大。

表面上看由于在时间离散过程高阶全能与质量全球积分守恒性质破坏引入的 Z 类系统误差仅是整个守恒量的最后几个尾数,数量不大(见图 1),通常很难想象通过消除这个偏差的负面影响有多大实际意义。而实验结果却恰恰相反。实际上,如果换一个角度,这个结果也并不那么不可思议,显然,实际大气系统是一个复杂的具有初值敏感性非线性系统,由于 Z 类误差效果是系统内部误差,存在于积分的每一个时刻,而通过一步一步积分最终获得的总的 Z 类误差可以看作是在此之前每一个积分时刻为初值积分到最后由于初值敏感性引入的偏差效果的总和,因此,其总体积累效果无疑可以是巨大的。

通常认为构造(高阶)守恒格式对需要进行长期数值积分的问题很有意义,但是迄今为止这一点似乎还不曾获得足够有力的实验证据支持,对于时间离散守恒格式方案更是如此。因此,这个论断严格讲只能算是个猜想,对于多长时间的数值积分这种意义才会变得显著起来更是从未有过结论。本文实验工作表明,如果认为改进预报总体系统误差一半,改进总体误差 $1/3$ 可以认为是有意义的话,那么这个理论预言在月预报时间尺度上无疑是可以成立的;如果认为预报总体系统误差 $1/3$ 或者更小一些的改进,总体误差 $1/4$ 或者更小一些的改进已经可以认为是有显著意义的话,构造(高阶)守恒格式很有意义的预报时间尺度不仅可以是月甚至可以是 2 周或者更短。

就某个意义而言,系统内部 Z 类误差(源或汇)对于斜压原始方程总体(系统)误差的影响可以并不亚于模式真实外部下垫面地形强迫被虚假地抹平后引入的 T 类系统误差对于总体(系统)误差的负面影响。这个实验结果有助于我们更加明确地认识到构造(高阶)时间(差分)离散守恒格式消掉 Z 类系统误差重要意义。

参考文献

- [1] Galerkin B. Rods and Plates. Series occurring in various questions concerning the elastic equilibrium of rods and plates. Vestnik Inzhenerov, 1915, 19: 897- 908.
- [2] Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of atmospheric Motion. J Computational Phys, 1966, 1: 119- 143.
- [3] Lilly D K. On the computational stability of numerical solutions of time-dependent nonlinear geophysical fluid

dynamics problems. *Mon Wea Rev*, 1965, 93: 11– 26.

- [4] Bryan K. A scheme for numerical integration of the equations of motion on irregular grid free of nonlinear instability. *Mon Wea Rev*, 1966, 94:39– 40.
- [5] Grimmer M and Shaw D B. Energy preserving integrations of the primitive equations on sphere. *Quart J R Met Soc*, 1967, 93: 337– 349.
- [6] Grammelvedt A. A survey of finite-difference scheme for the primitive equation for a barotropic fluid. *Mon Wea Rev*, 1969, 97: 384– 404.
- [7] Williamson D L. Integration of the primitive barotropic model over a spherical grid. *Mon Wea Rev*, 1970, 98: 512– 520.
- [8] Sadourny R. Conservative finite-difference approximations of the primitive equations on quasi-uniform spherical grids. *Mon Wea Rev*, 1972 100, 136– 144.
- [9] Arakawa A and Lamb V R. A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equations. *Mon Wea Rev*, 1981, 109: 18– 36.
- [10] Arakawa A and Lamb V R. Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics*, 1977, 17: 174– 265.
- [11] Corby G A, Gilchrist A and Newson R L. A general circulation model of the atmosphere suitable for long period integration. *Quart J R Met Soc*, 1972, 809– 832.
- [12] Simmons A J and Burridge D M. An energy and angular momentum conserving vertical finite-difference scheme and hybrid vertical coordinates, *Mon Wea Rev*, 1981, 109: 758– 766.
- [13] 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础(第一卷). 北京: 科学出版社, 1979, 58– 59.
- [14] 王斌, 季仲贞. 显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验, *科学通报*, 1990, 35(10): 766– 768.
- [15] 曾庆存, 张学洪. 完全保持能量守恒的可压缩流体时空差分格式和协调的分解算法. *中国科学*, 1981, 24(11): 1355– 1366.
- [16] Zhang X. An energy-conservation Galerkin approximation to the barotropic primitive equations. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences*, 1982, 6: 442– 448.
- [17] 钟青. 半隐式完全平方守恒时间差分格式的构造及其初步检验. *科学通报*, 1991, 36(19): 1480– 1483.
- [18] Zhong Q. Theory of perfect square conservative scheme and its preliminary application, CAS/JSC working group of numerical experiment 1992 report (publication of WMO), 1992, 17: 3– 26.
- [19] 钟青. 论发展问题保真计算格式的一般构造原理和若干应用. *计算物理*, 1992, 9(4): 758–764.
- [20] 钟青. 长效、经济的发展问题保真计算格式的补偿构造原理及其初步应用. *科学通报*, 1993, 38(12): 1101– 1105.
- [21] 钟青. 长时效的正压原始方程拟能完全守恒谱模式. *气象学报*, 1994, 52(4): 385– 396.
- [22] 钟青. 有效的正压原始方程拟能完全守恒谱模式. *大气科学*, 1995, 19(4): 445–454.
- [23] Charney J G, Fjortoft R and Neumann J V. Numerical integration of the barotropic vorticity equations. *Tellus*, 1950, 2: 237– 255.
- [24] Phillips N A. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J Meteor*, 1957, 14: 184– 185.
- [25] Robert A J Hendersen J and Turnbull C. An implicit time integration scheme for baroclinic models of the atmosphere. *Mon Wea Rev*, 1972, 100: 329– 335.
- [26] Asselin R. Frequency filter for time integrations. *Mon Wea Rev*, 1972, 100: 487– 490.
- [27] Simmons A J and Struving R. An energy and angular-momentum conserving vertical finite-difference scheme, hybrid vertical coordinates and medium-range weather prediction, ECMWF Tech Rep, 1981, 28: 68pp.
- [28] Machenhauer B and Rasmussen E. On the integration of the spectral hydrodynamical equations by a transform method. *Inst. of Theo Met., Univ. of Copenhagen*, 1972. Report No. 4.
- [29] Eliassen E, Machenhauer B and Rasmussen E. On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields. *Inst. of Theo. Met. Univ. of Copenhagen*,

1970, Report No. 2.

[30] 蒋伯诚, 周振中, 常谦顺. 计算物理中的谱方法- FFT 及其应用. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1989. 101pp.

THE FORMULATION OF FIDELITY SCHEMES OF PHYSICAL CONSERVATION LAWS AND IMPROVEMENTS ON A TRADITIONAL SCHEME OF BAROCLINIC PRIMITIVE EQUATIONS FOR NUMERICAL WEATHER PREDICTION

Zhong Qing

(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100029*)

Abstract

In this paper, two formulation theorems of time-difference fidelity schemes for general quadratic and cubic physical conservation laws are respectively constructed and proved, with earlier major conserving time-discretized schemes given as special cases. These two theorems can provide new mathematical basis for solving basic formulation problems of more types of conservative time-discrete fidelity schemes, and even for formulating conservative temporal-spatial discrete fidelity schemes by combining existing instantly conserving space-discretized schemes. Besides, the two theorems can also solve two large categories of problems about linear and nonlinear computational instability.

The traditional global spectral-vertical finite-difference semi-implicit model for baroclinic primitive equations is currently used in many countries in the world for operational weather forecast and numerical simulation of general circulation. The present work, however, based on Theorem 2 formulated in this paper, develops and realizes a high-order total energy conserving semi-implicit time-difference fidelity scheme for global spectral-vertical finite-difference model of baroclinic primitive equations. Prior to this, such a basic formulation problem remain unsolved for long, whether in terms of theory or practice. The total energy conserving semi-implicit scheme formulated here is applicable to real data long-term numerical integrations.

The experiment of thirteen FGGE data 30-day numerical integrations indicates that, the new type of total energy conserving semi-implicit fidelity scheme can surely modify the systematical deviation of energy and mass conserving of the traditional scheme. It should be particularly noted that, under the experimental conditions of the present work, the systematic errors induced by the violation of physical laws of conser-

vation in the time-discretized process regarding the traditional scheme designs (called type Z errors for short) can contribute up to one-third of the total systematic RMS error at the end of second week of the integration and exceeds one half of the total amount four weeks afterwards. In contrast, by realizing a total energy conserving semi-implicit fidelity scheme and thereby eliminating corresponding type Z errors, roughly an average of one-fourth of the RMS errors in the traditional forecast cases can be reduced at the end of second week of the integrations, and averagely more than one-third reduced at integral time of four weeks afterwards. In addition, experiment results also reveal that, in a sense, the effects of type Z errors are no less great than that of the real topographic forcing of the model. The prospects of the new type of total energy conserving fidelity schemes are very encouraging.

Key words: Global spectral model for baroclinic primitive equations, Total energy conserving semi-implicit fidelity scheme, Type Z systematic errors, Physical conservation laws, Medium-range numerical prediction.