第 56 卷 第 1 期
1998 年 2 月

气 象 学 报
ACTA METEOROLOGICA SINICA

Vol. 56, No. 1
Feb., 1998

层结大气中非线性椭圆余弦波和孤立波的研究*

徐银梓　党人庆

(南京大学大气科学系, 南京, 210008)

摘　　要

在前文采用半地转近似和行波法来研究层结大气中的非线性波动的基础上, 进一步探讨非线性方程及其级数近似方程的解的稳定性, 波动解的存在条件和波动的一些特征。研究指出, 在平衡点附近, 将非线性方程用其级数近似方程代替是可行的、合理的。在初始拟能满足一定的条件下, 椭圆余弦波和孤立波是存在的。文中还求得了椭圆余弦波解的周期、x 向波长和振幅以及孤立波的宽度和振幅。并指出, 孤立波的宽度和振幅不但与波速有关, 还与 β 因子和层结稳定度有关, 而且在相同的某条件下, 西行的混合 Rossby-重力孤立波比起东行的惯性重力孤立波来, 宽度要小但振幅却大。

关键词: 层结大气, 椭圆余弦波, 孤立波, 解的稳定性。

1　引　言

文献[1]和[2]研究了可压缩的层结大气中的非线性波动, 采用的方法是半地转近似和行波法, 得到了非线性的椭圆余弦波和孤立波, 所研究的闭合方程组在半地转近似下为:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)u_g=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}+fv\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)v_g=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}-fu\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial p}=0\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p}+S\omega=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式中 ω 为 p 坐标中的垂直速度, φ 为偏差位势高度, (u_g, v_g) 为地转风, S 为静力稳定度(取为常数)。在 β 平面近似中, 科氏参数 $f=f_0+\beta y$。行波解设为

$$u=U(\theta),\ v=V(\theta),\ \omega=\Omega(\theta),\ \varphi=\Phi(\theta), \tag{2}$$

* 初稿时间: 1996 年 1 月 3 日; 修改稿时间: 1997 年 2 月 14 日。
资助课题: 85—906—07 课题。

式中 θ 为位相:

$$\theta = kx + my + np - \nu t \tag{3}$$

k, m, n 为 x, y, p 向波数, ν 为频率。利用偏差位势高度 φ 来表达地转风, 并对式(1) 中的前两 式(即水平运动方程) 取旋度和涡度运算, 得到涡度方程和散度方程, 再将式(2) 和式(3) 代入涡度方程和散度方程以及式(1) 的后两式(即连续方程和绝热方程) 。这样, 式(1) 就化为关于 U, V, Ω, Φ 的方程组, 即

$$\begin{cases} [(kU + mV - \nu)K_h^2\Phi'']' + f_0^2(kU' + mV') + f_0\beta V = 0 \\ f_0(kV' - mU') - \beta U - K_h^2\Phi'' = 0 \\ kU' + mV' + n\Omega' = 0 \\ (kU + mV - \nu)n\Phi'' + S\Omega = 0 \qquad (K_h^2 = k^2 + m^2) \end{cases} \tag{1'}$$

积分式(1)′的第三式, 并取积分常数为零, 于是有

$$U = -\frac{1}{k}(n\Omega + mV)$$

将此式代入式(1)′的第四式, 得到

$$\Phi'' = \frac{S\Omega}{n^2(\Omega + \nu/n)}$$

再将上述的 U 和 Φ'' 代入式(1)′的第一式, 得到

$$V = b\Omega'$$

式中

$$b = \frac{f_0 n K_3^2}{\beta n_1^2}, n_1^2 = \frac{f_0^2}{c_0^2}, c_0^2 = \frac{S}{n^2}, K_3^2 = K_h^2 + n_1^2$$

将上述的 U, Φ'', V 的表达式代入式(1)′的第二式, 可得到关于 Ω 的单一变量方程为:

$$\Omega'' = -\frac{m\beta}{f_0}\left(\frac{K_3'}{K_h K_3}\right)^2\Omega' - \left(\frac{\beta}{K_h K_3 c_0}\right)^2\Omega + \frac{\beta k}{K_3^2 n}\frac{\Omega}{\Omega + \nu/n}$$

$$(K_3' = k^2 + m^2 + 2n_1^2 = K_3^2 + n_1^2)$$

为简单起见, 取 $m = 0$, 则

$$\Omega'' = -\alpha_0^2\Omega - \frac{\upsilon_1}{n}\frac{\Omega}{\Omega + \upsilon/n} \tag{4}$$

式中

$$\alpha_0^2 = \frac{1}{k^2 + n_1^2}\left(\frac{\beta}{kc_0}\right)^2, \upsilon_1 = \frac{\beta k}{k^2 + n_1^2}, n_1^2 = \frac{f_0^2}{c_0^2}, c_0^2 = \frac{S}{n^2} \tag{5}$$

c_0 为线性纯重力内波的水平相速, υ_1 为线性 Rossby 波频率, n_1 为 Rossby 变形半径的倒数。式(4)为文献[1]中的式(13b)并取 $m=0$ 时的情形。文献[1]求得了级数近似方程的解析解为椭圆余弦波或孤立波,其频率有两个,所以有两种非线性波动:一种是东行的惯性重力椭圆余弦波或孤立波(以下简称东行波),一种是西行的混合 Rossby-重力椭圆余弦波或孤立波(以下简称西行波)。文中将在此基础上,进一步探讨方程(4)的解在平衡点附近的稳定性,文献[1]取级数近似方程解是否合理?上述两种波动解在何种条件下才存在?这两种波动解有些什么特征?讨论这些问题对加深关于层结大气中非线性波动的认识是重要的。

2 非线性方程解的稳定性

作变换

$$\tau = a^{1/2}\theta,\ Q = \Omega/c_p \tag{6}$$

式中

$$a = -\frac{\upsilon_1}{\upsilon} = -\frac{c_{xo}}{c_x},\ c_{xo} = -\frac{\beta}{k^2+n_1^2},\ c_x = \frac{\upsilon}{k},\ c_p = \frac{\upsilon}{n} \tag{7}$$

c_{xo} 为线性 Rossby 波的 x 向相速,显见 $c_{xo}<0$, c_x 为非线性波的 x 向相速, c_p 为 p 相速, a 为无量纲相速。当 $a>0$ 时,有 $c_x>0$,表明非线性波向东传播,即东行波。当 $a>0$ 时,则为西行波。

将式(6)代入式(4),则有

$$\frac{d^2Q}{d\tau^2} = -\alpha^2 Q + \mathrm{sgn}(a)\frac{Q}{Q+1} \tag{8}$$

式中

$$\alpha^2 = \frac{\alpha_0^2}{a} = \frac{\beta c_x}{k^2 c_0^2} \tag{9}$$

$\mathrm{sgn}(a)$ 为符号函数,即 $a>0$ 时取值为 1, $a<0$ 时 取值为 -1。
由于

$$\frac{d}{dQ}\frac{1}{2}\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)^2 = \frac{d^2Q}{d\tau^2}$$

故对式(8)求积分,可得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)^2 + V(Q) = E \tag{10}$$

式中

$$V(Q) = \frac{\alpha^2}{2}Q^2 - \mathrm{sgn}(a)(Q - \ln Q + 1) \tag{11}$$

$\frac{1}{2}(\frac{dQ}{d\tau})^2$ 相当于动能, $V(Q)$ 相当于位能, E 为积分常数, 称为拟能, 相当于总能量, 是一个守恒量, 可由初值决定, 记作 E_0。

方程(8) 有两个平衡点: $(Q=0, \frac{dQ}{d\tau}=0)$ 和 $(Q=\mathrm{sgn}(a)/\alpha^2-1, \frac{dQ}{d\tau}=0)$, 暂且只讨论第一个平衡点(0, 0), 在此点处, 位能函数 $V(Q)$ 的二阶导数为

$$\frac{dV^2(Q)}{dQ^2}=\alpha^2-\mathrm{sgn}(a) \tag{12}$$

当二阶导数为正时, 函数有极小值, 即位能在平衡点有极小值, 于是在平衡点附近, 解是稳定的。而当二阶导数为负时, 位能有极大值, 解是不稳定的。所以根据式(12), 可得知在平衡点附近, 有

$$\frac{d^2V(Q)}{dQ^2}\begin{cases}>0 & (\text{当 } a<0, \text{或 } a>0 \text{ 且 } \alpha^2>1 \text{ 时}), \text{解稳定} \\ <0 & (\text{当 } a>0 \text{ 且 } \alpha^2<1 \text{ 时}), \text{解不稳定}\end{cases} \tag{13}$$

由此可知, 对于西行波 $(a<0)$, 解总是稳定的, 而对于东行波$(a>0)$, 则只有在 $\alpha^2>1$, 即 $\frac{\beta c_x}{k^2c_0^2}>1$ 时, 解才是稳定的, 在 $\alpha^2<1$, 即 $\frac{\beta c_x}{k^2c_0^2}<1$ 时, 解是不稳定的。或者说, β 大(纬度低) 或波长长(k 小), 有利于东行的惯性重力波解的稳定。

3 近似解的稳定性及其存在条件

非线性方程目前很难求得解析解, 只能设法求其级数近似方程的解。为此, 利用 $\frac{1}{1+x}\approx 1-x\ (|x|<1)$, 可将式(8) 近似地化为

$$\frac{d^2Q}{d\tau^2}=-\alpha^2Q+\mathrm{sgn}(a)Q(1-Q) \tag{14}$$

仿前, 可求得能量积分为

$$\frac{1}{2}(\frac{dQ}{d\tau})^2+V(Q)=E_0 \tag{15}$$

式中位能函数为

$$V(Q)=\frac{\alpha^2}{2}Q^2-\mathrm{sgn}(a)(\frac{Q^2}{2}-\frac{Q^3}{3}) \tag{16}$$

显见(0, 0) 为其一个平衡点。易求得在此平衡点处, 位能函数 $V(Q)$ 的二阶导数与式(12) 相同, 仍为 $\alpha^2-\mathrm{sgn}(a)$。所以判定解的稳定性的式(13) 仍然成立。这说明了, 在(0, 0) 附近, 采用级数近似方程(14) 是合适的。于是, 可较容易地求出式(14) 的解析解来近似地代替式(8) 的解。

下面, 分 $a<0$(西行波) 和 $a>0$(东行波) 两步来求解式(14)。

(1) $a<0$

由能量积分式(15),可得到

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\left[Q^3 - \frac{2}{3}(\alpha^2+1)Q^2 + 3E_0\right]^{1/2} \tag{17}$$

由三次代数方程的有关知识可知,式(17)右端的中括号内关于 Q 的三次多项式有 3 个不等实零点的充要条件为

$$0 < E_0 < \frac{(\alpha^2+1)^3}{6} \tag{18}$$

这 3 个实零点分别为

$$\begin{aligned} Q_1 &= (\alpha^2+1)\left(\frac{1}{2}+\cos\delta\right) \\ Q_2 &= (\alpha^2+1)\left[\frac{1}{2}-\cos\left(\delta+\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ Q_3 &= (\alpha^2+1)\left[\frac{1}{2}-\cos\left(\delta-\frac{\pi}{3}\right)\right] \end{aligned} \tag{19}$$

式中

$$\delta = \frac{1}{3}\arccos\left[1-\frac{12E_0}{(\alpha^2+1)^3}\right], \quad \delta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \tag{20}$$

于是,可求得椭圆余弦波解为[3]

$$Q(\tau) = Q_2 - (Q_2 - Q_3)\,\mathrm{cn}^2\left[\left(\frac{Q_1-Q_3}{6}\right)^{1/2}\tau\right] \tag{21}$$

或者将式(19)代入上式,得到

$$\begin{aligned} Q(\tau) = {} & (\alpha^2+1)\left[\frac{1}{2}-\cos\left(\delta+\frac{\pi}{3}\right)\right] - \sqrt{3}(\alpha^2+1)\sin\delta \\ & \mathrm{cn}^2\left\{\left[\frac{\sqrt{3}}{6}(\alpha^2+1)\cos\left(\delta-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{1/2}\tau\right\} \end{aligned} \tag{22}$$

当拟能 E_0 满足下述条件,即

$$E_0 = \frac{(\alpha^2+1)^3}{6} \tag{23}$$

时,则有

$$Q_1 = Q_2 = \alpha^2+1,\ Q_3 = -\frac{1}{2}(\alpha^2+1),\ \delta = \frac{\pi}{3} \tag{24}$$

椭圆余弦波解式(21)便化为孤立波解:

$$Q(\tau) = \alpha^2 + 1 - \frac{3}{2}(\alpha^2+1)\,\mathrm{sech}^2\left[\left(\frac{\alpha^2+1}{4}\right)^{1/2}\tau\right] \tag{25}$$

由式(6)、(9) 知, 式(25) 可改写为

$$\Omega(\theta) = \frac{v}{n}\left(1 - \frac{\beta v}{k^3 c_0^2}\right) - \frac{3v}{2n}\left(1 - \frac{\beta v}{k^3 c_0^2}\right)\operatorname{sech}^2\left\{\left[\frac{\beta k\left(1 - \beta v/(k^3 c_0^2)\right)}{-4v(k^2 + n_1^2)}\right]^{1/2}\theta\right\} \tag{26}$$

这就是文献[1] 中的式(38)。在文献[1] 中, 已分析得出, 西行的非线性波是混合 Rossby–重力椭圆余弦波或孤立波。在此指出, 式(18) 即为混合 Rossby–重力椭圆余弦波解存在的充要条件, 而式(23) 即为混合 Rossby–重力孤立波解存在的充要条件。

(2) $a > 0$

由式(15) 解得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\left[-Q^3 - \frac{3}{2}(\alpha^2 - 1)Q^2 + 3E_0\right]^{1/2} \tag{27}$$

在条件

$$0 < E_0 < \frac{(\alpha^2 - 1)^3}{6}, \quad (\alpha^2 > 1) \tag{28}$$

下, 式(27) 右端的 Q 的三次多项式有 3 个不等实零点, 它们是

$$\begin{cases} Q_1 = (\alpha^2 - 1)\left(-\dfrac{1}{2} + \cos\delta\right) \\ Q_2 = (\alpha^2 - 1)\left[-\dfrac{1}{2} - \cos\left(\delta + \dfrac{\pi}{3}\right)\right] \\ Q_3 = (\alpha^2 - 1)\left[-\dfrac{1}{2} - \cos\left(\delta - \dfrac{\pi}{3}\right)\right] \end{cases} \tag{29}$$

式中

$$\delta = \frac{1}{3}\arccos\left[\frac{12E_0}{(\alpha^2 - 1)^3} - 1\right], \quad \delta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \tag{30}$$

椭圆余弦波解为

$$Q(\tau) = Q_2 + (Q_1 - Q_2)\operatorname{cn}^2\left[\left(\frac{Q_1 - Q_3}{6}\right)^{1/2}\tau\right] \tag{31}$$

将式(29) 代入上式, 则化为

$$Q(\tau) = (\alpha^2 - 1)\left[-\frac{1}{2} - \cos\left(\delta + \frac{\pi}{3}\right)\right] + \sqrt{3}(\alpha^2 - 1)\cos\left(\delta + \frac{\pi}{6}\right)\operatorname{cn}^2\left\{\left[\frac{\sqrt{3}}{6}(\alpha^2 - 1)\cos\left(\delta - \frac{\pi}{6}\right)\right]^{1/2}\tau\right\} \tag{32}$$

在下述条件, 即

$$E_0 = \frac{(\alpha^2 - 1)^3}{6} \tag{33}$$

成立时, 则有

$$Q_1 = \frac{\alpha^2 - 1}{2}, Q_2 = Q_3 = -(\alpha^2 - 1), \delta = 0 \tag{34}$$

此时, 椭圆余弦波解式(31) 或(32) 化为孤立波解:

$$Q(\tau) = 1 - \alpha^2 + \frac{3}{2}(\alpha^2 - 1)\operatorname{sech}^2\left[\left(\frac{\alpha^2 - 1}{4}\right)^{1/2}\tau\right] \tag{35}$$

此式与文献[1]的式(38)是一致的。在文献[1]中已分析出, 东行的非线性波是惯性重力椭圆余弦波或孤立波。在此已得到: 式(28)即为东行的惯性椭圆余弦波解的存在条件, 而式(33)即为东行的惯性重力孤立波解的存在条件。

4 非线性波的一些特征

仍分为 $a < 0$ 和 $a > 0$ 两种情况来讨论。

(1) $a < 0$

因为 Jacobi 椭圆余弦函数 $\mathrm{cn}x$ 的周期为 $4K(s)$, 所以 cn^2x 的周期为 $2K(s)$。$K(s)$ 为第一类完全椭圆积分:

$$K(s) = \int_0^1 \frac{dq}{\sqrt{(1 - s^2q^2)(1 - q^2)}} \tag{36}$$

式中 s 称为模数, 表达式为

$$s^2 = \frac{Q_2 - Q_3}{Q_1 - Q_3} \tag{37}$$

将式(19)代入式(37), 得到

$$s^2 = \frac{\sin\delta}{\cos\left(\delta - \frac{\pi}{6}\right)} \tag{38}$$

因为 $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 所以由上式知, $s \in (0, 1)$。

由式(21)和(22)知, 椭圆余弦波解 $Q(\tau)$ 的周期 T 和振幅 A 为

$$\begin{cases} T = 2K(s)\left(\dfrac{Q_1 - Q_3}{6}\right)^{-1/2} = 2K(s)\left[\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\alpha^2 + 1)\cos\left(\delta - \dfrac{\pi}{6}\right)\right]^{-1/2} \\ A = Q_2 - Q_3 = \sqrt{3}(\alpha^2 + 1)\sin\delta \end{cases} \tag{39}$$

利用式(2)、(3)和(6)可得到

$$\tau = a^{1/2}(kx + np - \upsilon), \quad Q = \frac{1}{c_p}\omega(x, p, t) \tag{40}$$

由式(22)和(40), 可得到垂直 p 速度 $\omega(x, p, t)$ 在空间 (x, p, t) 中的周期 T, x 向波长 L_x 和振幅 A 分别为

$$\begin{cases} T = \dfrac{2K(s)}{\upsilon}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{6} a (\alpha^2+1)\cos(\delta-\dfrac{\pi}{6})\right]^{-1/2} \\ L_x = \dfrac{2K(s)}{k}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{6} a (\alpha^2+1)\cos(\delta-\dfrac{\pi}{6})\right]^{-1/2} \\ A = \sqrt{3}\, c_p(\alpha^2+1)\sin\delta \end{cases} \tag{41}$$

下面再来分析孤立波的特征。由式(25)和(9)可知, 孤立波 $Q(\tau)$ 的宽度 d 为[4]

$$d = \left(\frac{\alpha^2+1}{4}\right)^{-1/2} = \frac{2}{\left(\dfrac{\beta c_x}{k^2 c_0^2}+1\right)^{1/2}} \tag{42}$$

或者回到 (x, p, t) 空间, 孤立波 $\omega(x, p, t)$ 的 x 向宽度 d 为

$$d = \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha^2+1}{4}\right)^{-1/2} = \frac{2}{\left(\dfrac{\beta c_x}{c_0^2}+k^2\right)^{1/2}} \tag{43}$$

由上两式可知, 层结稳定度越大(c_0 越大), 则 d 越大。这说明层结稳定度的作用是扩大非线性波的宽度, 使波动频散。同样, β 越小或波速 c_x 越小, , 则孤立波的宽度越大。

由式(25) 知, 孤立波 $Q(\tau)$ 的振幅 A 为

$$A = \frac{3}{2}(\alpha^2+1) = \frac{3}{2}\left(\frac{\beta c_x}{k^2 c_0^2}+1\right) \tag{44}$$

或者孤立波 $\omega(x, p, t)$ 的振幅为

$$A = \frac{3}{2} c_p\left(\frac{\beta c_x}{k^2 c_0^2}+1\right) \tag{45}$$

上两式表明, 孤立波传播越快, 即 c_p, c_x 越大, 则振幅 A 越大, 由此可知, 若有一群孤立波, 则必定是振幅大的孤立波最终将跑到前面去。由于 β 在分子上, 所以 β 越大, 振幅也越大, 而层结越稳定(c_0 越大), 则振幅越小。

(2) $a > 0$

与前类似, 由式(31) 和(32) 可得到东行的惯性重力椭圆余弦波 $Q(\tau)$ 的周期和振幅为

$$\begin{cases} T = 2K(s)\left(\dfrac{Q_1-Q_3}{6}\right)^{-1/2} = 2K(s)\left[\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\alpha^2-1)\cos(\delta-\dfrac{\pi}{6})\right]^{-1/2} \\ A = Q_1 - Q_2 = \sqrt{3}(\alpha^2-1)\cos(\delta-\dfrac{\pi}{6}) \end{cases} \tag{46}$$

由此容易写出椭圆余弦波 $\omega(x, p, t)$ 的周期 T, x 向波长 L_x 和振幅 A 为

$$\begin{cases} T = \dfrac{2K(s)}{\upsilon}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{6} a (\alpha^2-1)\cos(\delta-\dfrac{\pi}{6})\right]^{-1/2} \\ L_x = \dfrac{2K(s)}{k}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{6} a (\alpha^2-1)\cos(\delta-\dfrac{\pi}{6})\right]^{-1/2} \\ A = 3\, c_p(\alpha^2-1)\cos(\delta+\dfrac{\pi}{6}) \end{cases} \tag{47}$$

由式(35)和(9)可得到东行的惯性重力孤立波 $Q(\tau)$ 的宽度 d 为

$$d = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{4}\right)^{-1/2} = \frac{2}{\left(\frac{\beta c_x}{k^2 c_0^2} - 1\right)^{1/2}} \tag{48}$$

或者孤立波 $\omega(x, p, t)$ 的 x 向宽度为

$$d = \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha^2 - 1}{4}\right)^{-1/2} = \frac{2}{\left(\frac{\beta c_x}{c_0^2} - k^2\right)^{1/2}} \tag{49}$$

由于 $\alpha^2 > 1$, 即 $\beta c_x / (k^2 c_0^2) > 1$, 所以(Ⅰ) c_0 越大, 则 d 越大; (Ⅱ) β 越小, 则 d 越大; (Ⅲ) c_x 越小, d 越大, 即移速越慢的波越宽。这些特征在定性上与西行的孤立波是相同的。但是, 比较式(42) 与(48) 可知, 由于它们的右端顶中出现加减号的差异, 因此在 α^2 值相同的条件下, 西行的混合 Rossby–重力孤立波比东行的惯性重力孤立波的宽度要小。

由式(35)知, 东行波 $Q(\tau)$ 的振幅为

$$A = \frac{3}{2}(\alpha^2 - 1) = \frac{3}{2}\left(\frac{\beta c_x}{k^2 c_0^2} - 1\right) \tag{50}$$

或东行波 $\omega(x, p, t)$ 的振幅为

$$A = \frac{3}{2} c_p \left(\frac{\beta c_x}{k^2 c_0^2} - 1\right) \tag{51}$$

比较式(44) 和(50), 可知关于振幅与波速、β 因子、层结稳定度三者的关系, 东行波与西行波在定性上是相似的, 但由右端项中的加减号不同, 所以在 α^2 值相同的条件下, 显见西行的混合 Rossby–重力孤立波的振幅比东行的惯性重力孤立波要大。

5 结 论

在文献[1] 的基础上, 进一步探索了层结大气中非线性波动解的稳定性、级数近似方程解的可用性、椭圆余弦波和孤立波解的存在性以及波动的一些特征。得到初步结论如下:

(1) 层结大气中的非线性波动解的稳定性条件由式(13) 决定, 即西行波解总是稳定的。而东行波解则不然, 当 $\alpha^2 > 1$ 时, 解是稳定的, $\alpha^2 < 1$ 时解是不稳定 的。

(2) 级数近似方程的解的稳定性条件与原非线性方程相同。因而用级数近似方程求得的解析解来代替原方程的解是可行的, 合理的。

(3) 西行的混合 Rossby–重力椭圆余弦波存在的条件是, 初始拟能 E_0 满足不等式: $0 < E_0 < (\alpha^2 + 1)^3/6$, 其解由式(22) 表达。西行的混合 Rossby–重力孤立波存在的条件是: $E_0 = (\alpha^2 + 1)^3/6$, 其解由式(25) 表达。东行的惯性重力椭圆余弦波存在的条件是: $0 < E_0 < (\alpha^2 - 1)^3/6$, 其解由式(32) 表达。东行的惯性重力孤立波存在的条件是: $E_0 = (\alpha^2 - 1)^3/6$, 其解由式(35) 表达。

(4) 西行的椭圆余弦波的周期、x 向波长和振幅由式(41) 表达, 东行的则由式(47) 表

达。

(5) 西行的和东行的孤立波的宽度均与波速、β 因子及层结有关: 波速越慢或 β 越小或层结越稳定, 则孤立波越宽。在 α^2 值相同的假定下, 西行的孤立波比东行的孤立波的宽度要小。

(6) 西行和东行孤立波的振幅均与波速、β 因子及层结有关: 波速越快或 β 越大, 则振幅越大, 而层结越稳定, 则振幅越小。在 α^2 值相同的假定下, 西行的孤立波的振幅比东行孤立波的要大。

以上初步结论有待实践进一步检验。上升速度 ω 的非线性波动, 其较大振幅将会引起降水或暴雨, 是人们所关注的, 有待继续对此进行研究。

参考文献

1 徐银梓. 半地转近似下的混合 Rossby-重力椭圆余弦波. 气象学报, 1996, 54(3), 282～293

2 谭本馗, 刘式适. 地球流体中的非线性 Rossby 波. 北京大学学报, 1988, 24(3): 341～350

3 郭秉荣. 线性与非线性波导论. 北京: 气象出版社, 1990. 202～206

4 刘式适, 刘式达. 大气动力学(下册). 北京: 北京大学出版社, 1991. 336

A STUDY ON THE NON-LINEAR CNOIDAL WAVES AND SOLITARY WAVES IN THE STRATIFIED ATMOSPHERE

Xu Yinzi Dang Renqing

(*Deptartment of Atmospheric Sciences, Nanjing University, Nanjing*, 210008)

Abstract

On the basis of the works of Tan et al. (1988) and Xu (1996) on the non-linear waves in the stratified atmosphere by using the methods of the semi-geostrophic approximation and the travelling wave solution, the stability of the solutions of the non-linear equation and its approximate series equation, the existence condition of the wave solution and some characteristics of the waves are discussed in this paper. The results are: (1) near the equilibrium point, substituting the solution of non-linear equation with that of its approximate series equation is reasonable; (2) the solutions of the cnoidal waves and solitary waves are existant when the initial enstrophy satisfy certain conditions; (3) the period, wave-length in x-direction, amplitude of the cnoidal waves, and the wave-width, amplitude of solitary waves are obtained; (4) the wave-width and amplitude of the solitary waves are concernd with not only the wave velocity but also the Rossby parameter and the stratification stability. Under the certain condition, the wave-width of the mixed Rossby-gravity solitary wave moving westward is less than that of inertial gravity solitary wave moving eastward, but the amplitude is bigger.

Key words: Stratified atmospher, Cnoidal waves, Solitary waves, Stability of the solution.