

# 三部多普勒天气雷达联合测量大气风场的 误差分布及最佳布局研究\*

张沛源 何 平 宋春梅 葛润生

(中国气象科学研究院, 北京, 100081)

## 摘 要

从理论上证明了三部多普勒天气雷达联合测量大气风场的误差分布是一组同心圆, 同心圆的圆心位置与三部雷达的相对位置和各部雷达的测速精度有关。各种误差分布半径与各部雷达的测速精度和误差的大小有关。如果三部雷达的测速精度相同, 联合探测的最佳布局是等边三角形, 其边长  $l$  与各部雷达的测速精度、要求的探测误差和雷达的最大探测距离 ( $L$ ) 有关。当三部多普勒天气雷达的测速精度都是  $1 \text{ m/s}$  时, 如果要求的探测误差小于或等于  $2 \text{ m/s}$ , 这时边长与雷达的最大探测距离之间的关系为:  $l = 0.55L$ 。

关键词: 三部多普勒雷达, 最佳布局, 误差分布。

## 1 引 言

从1960年代末起, 随着脉冲多普勒天气雷达技术的发展, 两部 and 三部多普勒天气雷达联合探测大气风场技术得到了迅速发展, 1969年, Larry Armijo<sup>[1]</sup>给出了三部和两部多普勒天气雷达联合探测大气风场的理论, 并在美国“国家冰雹研究实验”(NHRE 1969 ~ 1976)中得到实施, 在强风暴研究中取得了突破性成果<sup>[2]</sup>。因此在以后的世界各国的中尺度气象研究计划中, 都把多部多普勒天气雷达联合探测大气风场列为主要的探测手段。

1976年, Alan. R. Bolin 和 R. C. Srirastava<sup>[3]</sup>讨论了它的测量误差问题。1995年, Joshue Wuman 等人<sup>[4]</sup>在双站多普勒雷达网设计中, 采用了近似于等边三角形布局, 但没有论述这种布局的依据。

1993年在中美强对流雨暴试验计划会上, 开展了三部多普勒天气雷达布局 and 误差分布的讨论, 同时, 中国不少地方正在着手进行中尺度二级基地建设, 也提出了同样的问题。1994年以来, 一直在设计和准备的海峡两岸的中尺度气象试验(华南暴雨试验计划)将在1998年进入实施阶段, 因此再次提出三部和两部多普勒天气雷达联合探测大气风场的误差和雷达布局问题, 本文就是这一问题的研究结果。

## 2 三部多普勒天气雷达联合探测风场的误差空间分布特征

### 2.1 三部多普勒天气雷达联合探测风场的计算公式

\* 初稿时间: 1996年12月26日; 修改稿时间: 1997年3月27日。

选取第1部雷达的位置为 $(0, 0, 0)$ , 第2部雷达的位置为 $(x_2, 0, 0)$ , 第3部雷达的位置为 $(x_3, y_3, 0)$  (见图1), 这种坐标的选取内涵着3部多普勒天气雷达的海拔高度相同。设水平风在 $x$ 方向的分量为 $u$ , 在 $y$ 方向的分量为 $v$ , 这时三部多普勒天气雷达联合探测风场的计算公式为:

$$u(x, y, z) = (R_1 V_1 - R_2 V_2) X_2 \quad (1)$$

$$v(x, y, z) = [(x_2 - x_3) R_1 V_1 + x_3 R_2 V_2 - x_2 R_3 V_3] / x_2 y_3 \quad (2)$$

其中 $V_1, V_2, V_3$ 为三部雷达各自测得的径向速度。

$$R_1 = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$R_2 = [(x - x_2)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$R_3 = [(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

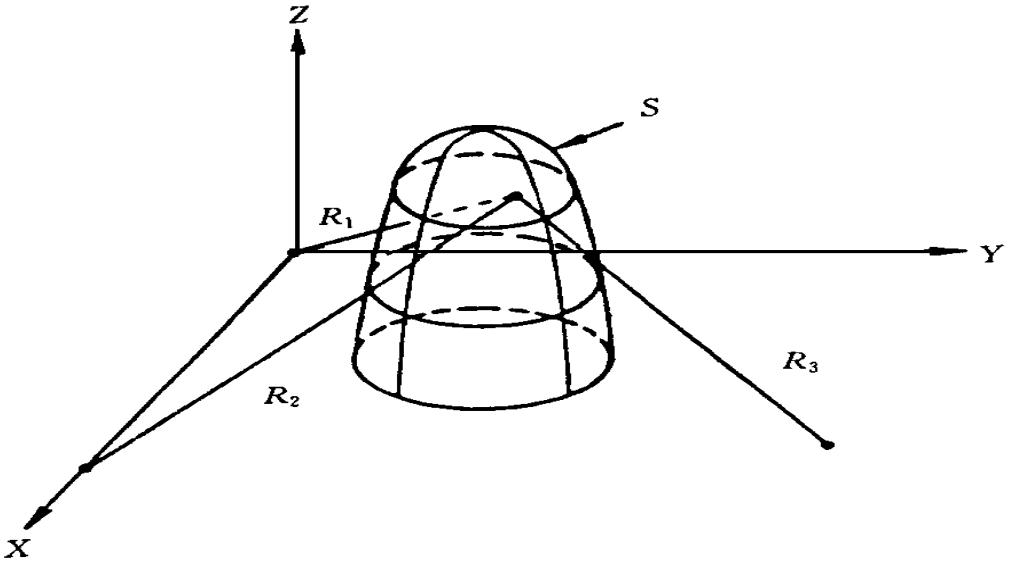


图1 三雷达布局的坐标示意图

## 2.2 三部多普勒雷达探测风场的误差

Alan R. Bolin and R. C. Srirastara<sup>[3]</sup>1976年给出三部多普勒雷达探测风场各测点的误差计算公式:

$$\sigma_u^2 = (R_1^2 \sigma_1^2 + R_2^2 \sigma_2^2) / x_2^2 \quad (3)$$

$$\sigma_v^2 = [(x_2 - x_3)^2 R_1^2 \sigma_1^2 + x_3^2 R_2^2 \sigma_2^2 + x_2^2 R_3^2 \sigma_3^2] / x_2^2 y_3^2 \quad (4)$$

其中 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ 为三部雷达各自测速的均方差。 $\sigma_u^2, \sigma_v^2$ 为联合探测水平风分量的均方差, 由此可知: 探测误差与雷达的布局和各部雷达的探测精度有关, 而且与探测点的位置有关, 也就是说不同点的探测精度是不同的, 探测误差有一个空间分布。

### 2.3 探测误差的空间分布特征

从式(3), (4) 很难直观地看出探测误差空间分布特征。为了研究探测误差的空间分布特征, 需要得到空间位置  $(x, y, z)$  与探测误差之间的关系, 为了使问题简单化, 可以令  $z = \text{常数}$ , 即讨论一个水平面上的误差分布, 并假设  $z = 0$ , 这样可以得出:

$$(x - Ax_2)^2 + y^2 = (A^2 + \frac{\sigma_u^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})x^2 \quad (5)$$

$$(x - \frac{l}{m})^2 + (y - \frac{n}{m})^2 = [(\frac{l}{m})^2 + (\frac{n}{m})^2 - (\frac{p}{m})] + \frac{x^2 y^2 \sigma_1^2}{m} \quad (6)$$

其中:

$$A = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$l = x_2(x_3^2 \sigma_2^2 + x_2 x_3 \sigma_3^2)$$

$$n = y_3 x_2^2 \sigma_3^2$$

$$p = x_2^2[(x_3^2 + y_3^2)\sigma_3^2 + x_3^2 \sigma_2^2]$$

$$m = (x_2 - x_3)^2 \sigma_1^2 + x_3^2 \sigma_2^2 + x_2^2 \sigma_3^2$$

式(5)乘  $y^2$ , 与式(6)相加可得:

$$(x - \frac{J}{k})^2 + (y - \frac{n}{k})^2 = [(\frac{J}{k})^2 + (\frac{n}{k})^2 - \frac{I}{k}] + \frac{x^2 y^2 (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)}{k} \quad (7)$$

$$J = l + x_2 y^2 \sigma_2^2$$

$$I = p + x_2^2 y^2 \sigma_2^2$$

$$k = m + y^2 [\sigma_1^2 + \sigma_2^2]$$

式(5), (6), (7) 中  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, A, l, n, p, m, J, I, k$  都是常数, 等式左侧的变量都是  $x, y$ , 右侧变量分别是  $\sigma_u^2, \sigma_v^2$  和  $(\sigma_u^2 + \sigma_v^2)$ , 它们都是二次曲线方程。

在式(5)中, 当  $\sigma_u^2 > \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  (8)

在式(6)中, 当  $\sigma_v^2 > [p - \frac{(l^2 + n^2)}{m}] / x^2 y^2$  (9)

在式(7)中, 当  $\sigma_u^2 + \sigma_v^2 > [I - \frac{(J^2 + n^2)}{k}] / x^2 y^2$  (10)

并当  $\sigma_u^2, \sigma_v^2, (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)$  取给定值时, 上述3式都是圆方程, 圆心位置为  $(Ax_2, 0), (\frac{l}{m}, \frac{n}{m}),$

$(\frac{J}{k}, \frac{n}{k})$ , 半径为:

$$R_u = \frac{x^2}{\sigma_2} \sqrt{A(\sigma_u^2 - A\sigma_1^2)} \quad (11)$$

$$R_v = \frac{x^2 y^2 \sigma_v^2 - p}{m} + \frac{(l^2 + n^2)}{m^2} \quad (12)$$

$$R_{u+v} = \frac{x^2 y^2 (\sigma_u^2 + \sigma_v^2) - I}{k} + \frac{(J^2 + n^2)}{k^2} \quad (13)$$

如果式(8), (9), (10)中的“>”变为“=”, 则式(5), (6), (7)变为直线方程。

如果式(8), (9), (10)中的“>”变为“<”, 则式(5), (6), (7)变为双曲线方程。

由于最后的计算误差, 不可能小于各部雷达的测量误差, 所以仅讨论式(8), (9), (10)关系式成立的情况。

根据方程(5), (6), (7)可以得出:

- $u$  的测量误差分布与第三部雷达的位置无关。
- $\sigma_u^2, \sigma_v^2, \sigma_u^2 + \sigma_v^2$  的圆心点的位置不重合。
- 各种误差的分布是一族同心圆, 随半径增大, 测量误差增大。
- 圆心位置和各種误差分布的半径与雷达相对位置和各部雷达的测量误差有关。

## 2.4 误差分布的变率

由式(11), (12), (13)可导出:

$$\sigma_u^2 = A \sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{A x^2} R_u^2 \quad (14)$$

$$\sigma_v^2 = \sigma_3^2 + \frac{(\sigma_2^2 + \sigma_5^2) x^2}{y^3} - \frac{l^2 + n^2}{m x^2 y^3} + \frac{m}{x^2 y^3} R_v^2 \quad (15)$$

$$\sigma_u^2 + \sigma_v^2 = \frac{I}{x^2 y^3} - \frac{l^2 + n^2}{k} + \frac{k R_{u+v}^2}{x^2 y^3} \quad (16)$$

对上述求微分, 即可得到误差分布的变率。

$$\frac{d\sigma_u^2}{dR_u} = \frac{2}{A x^2} R_u \quad (17)$$

$$\frac{d\sigma_v^2}{dR_v} = \frac{2m}{x^2 y^3} R_v \quad (18)$$

$$\frac{d\sigma_{u+v}^2}{dR_{u+v}} = \frac{2k}{A x^2 y^3} R_{u+v} \quad (19)$$

由此可知, 误差分布的变率与半径成正比, 即误差分布的等值线沿半径越来越密。

## 3 三部雷达的最佳布局

### 3.1 最佳布局的含义

由于三多普勒天气雷达探测大气风场的误差与雷达之间的相对位置有关, 而且探测误差的空间分布也与雷达之间的相对位置有关, 因此三部雷达如何放置, 使它的探测误差最小, 又使探测误差的空间分布满足探测要求, 这是值得研究的问题。另外, 多普勒天气雷

这是一种脉冲雷达, 每部雷达有一个最大可测距离的限制, 三部雷达联合探测大气风场, 所能探测到的区域直接与三部雷达的布局有关。而且不同布局所能探测到的区域的位置和大小都是不同的。因此谈论雷达的最佳布局与要探测的空间范围有关, 也与要求的探测误差有关。

这里讨论的最佳布局是指三部雷达怎样布局才能在给定的探测误差范围内, 使它的探测空间最大, 其含义是: 雷达如何布局, 才能使各点的探测误差最小。

### 3.2 研究方法

这一问题看起来很简单, 只要由式(11), (12)导出  $\sigma_u^2, \sigma_v^2$  的函数表达式, 然后, 通过求极小值的办法就能导出三部雷达的相对位置, 即求出  $x_2, x_3, y_3$ 。但由于  $\sigma_u^2$  只是  $x_2$  的函数, 与  $x_3, y_3$  无关, 因此, 求极值时, 要求  $x_2$ 。这一结果, 从理论上分析是合理的。即基线越长, 测量精度越高, 但实际上是不可行的。所以出现这一问题是因为在推导三多普勒天气雷达探测大气风场的计算公式时, 没有给出雷达探测距离的限制条件。实际上  $x_2$  是受到雷达探测距离限制的。

如果把  $x_2$  看成一个固定值, 通过对  $\sigma_v^2$  求极值去求  $x_3$  和  $y_3$ , 将得到一个五次方程, 目前五次方程的求解问题难以解决, 因此使问题复杂化。为了避开五次方程求解困难, 只能从误差分布的特征及合理性方面去寻求答案。

首先假定第一、第二部雷达的位置已给定, 即  $x_2 = \text{常数}$ , 通过误差分布特征的分析, 解决第三部雷达的最佳布局, 然后引进雷达最大探测距离参数( $L$ ), 求出  $x_2$  与  $L$  的关系, 由此完成三部雷达最佳布局的研究。

### 3.3 第三部雷达的最佳位置

由式(7)可知:  $\sigma_u^2 + \sigma_v^2$  的误差分布是以  $(\frac{L}{k}, \frac{n}{k})$  为圆心, 以  $R_{u+v}$  为半径的同心圆。  $R_{u+v}$  随  $\sigma_u^2 + \sigma_v^2$  的增大而增大, 其圆心  $(x_c, y_c)$  与雷达布局关系如下:

$$x_c = \frac{x_2[(x_3^2 + y_3^2)\sigma_1^2 + x_2x_3\sigma_3^2]}{(x_2 - x_3)^2\sigma_1^2 + x_3^2\sigma_2^2 + x_2^2\sigma_3^2 + y_3^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \quad (20)$$

$$y_c = \frac{x_2^2y_3\sigma_3^2}{(x_2 - x_3)^2\sigma_1^2 + x_3^2\sigma_2^2 + x_2^2\sigma_3^2 + y_3^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \quad (21)$$

为了使问题简化, 假定三部雷达的测速误差都是  $1 \text{ m/s}$ , 即  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$  则

$$x_c = \frac{x_2(x_3^2 + y_3^2 + x_2x_3)}{(x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + x_2^2 + 2y_3^2} \quad (22)$$

$$y_c = \frac{x_2^2y_3}{(x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + x_2^2 + 2y_3^2} \quad (23)$$

由式(23)可得:

$$2y_3^2 - \frac{x_2^2}{y_c}y_3 + [(x_2 - x_3)^2 + x_3^2 + x_2^2] = 0 \quad (24)$$

$$y_3 = \frac{x_2^2 \pm \sqrt{x_2^4 - 16y_c^2(x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3)}}{4y_c} \quad (25)$$

$$y_c^2 \text{ 有实数解的条件是: } y_c^2 = \frac{x_2^4}{16(x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3)} \quad (26)$$

由图1的坐标规定可知  $y_c^2$  越大, 误差分布的圆心点将离第一部和第二部雷达的距离越远, 可探测的范围将越大, 为了使  $y_c^2$  最大, 则要求  $(x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3)$  最小。即

$$\frac{d(x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3)}{dx_3} = 0 \quad (27)$$

由式(27)可得到  $x_3 = \frac{x_2}{2}$ , 这时  $y_c = \frac{x_2}{2}$ ,  $x_3$  与  $y_c$  代入式(25) 可得出  $y_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2$ ,  $x_3$ ,

$y_3$  代入式(22) 得:  $x_c = \frac{x_2}{2}$ 。

### 3.4 雷达之间的间距

为了简化讨论, 假定三部雷达的最大探测距离( $L$ ) 相同, 这样由图 2 可知:  $c_1$  圆是雷达一的探测范围,  $c_2$  圆是雷达二的探测范围, 联合探测的范围是两圆的重叠部分。

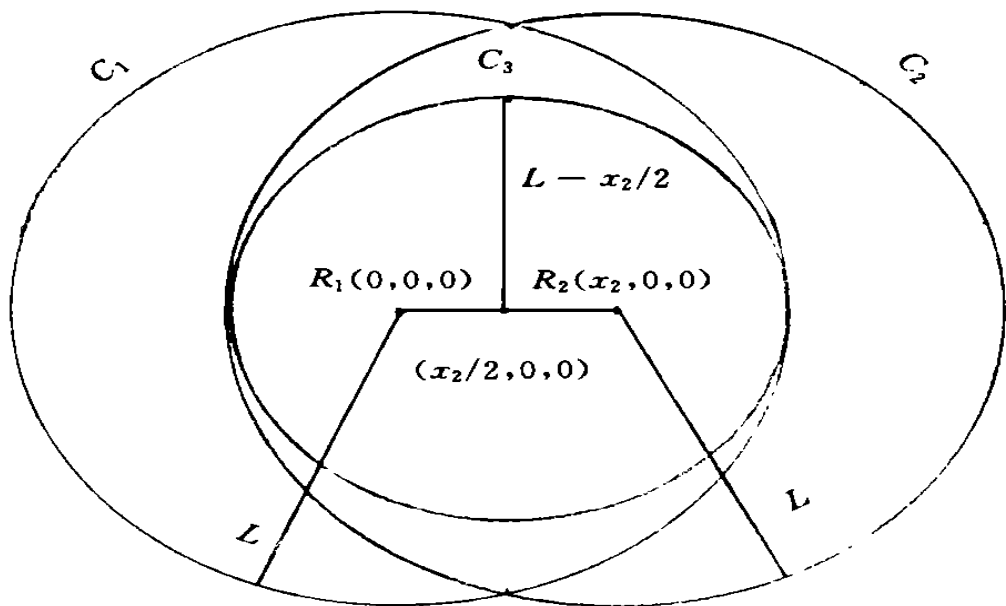


图2 二部雷达联合探测的示意图

当雷达的测速误差相同时, 由式(5) 可知,  $u$  的探测误差分布的圆心点在两部雷达连线的中点上, 联合探测范围中的最大等误差分布线是以  $L - \frac{x_2}{2}$  为半径的圆, 即

$$R_u = L - \frac{x_2}{2} \quad (28)$$

由式(28)和式(11)可得到:

$$(L - \frac{x_2}{2})^2 = x_2^2 [\frac{1}{2}(\sigma_u^2 - \frac{1}{2})] \quad (29)$$

$$x_2 = L \frac{1 \pm \sqrt{2\sigma_u^2 - 1}}{1 - \sigma_u^2} \quad (30)$$

由式(30)可知:  $x_2$  与雷达的最大探测距离和希望获得的探测精度有关, 两个根的选取应根据合理性作出判断, 当  $\sigma_u$  取 2 m/s 时, 一个根为:  $x_2 = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}L \approx 0.55L$ 。另一个根为:  $x_2 = \frac{\sqrt{7} + 1}{3}L$ , 此根是不合理的解。  $R_u = 0.73L$ 。

在这种情况下, 由3.3节的讨论结果可知, 第三部雷达的位置在第一部雷达与第二部雷达连线的中垂线上, 距中点的位置为  $0.48L$ 。由式(6)可知,  $\sigma_v$  的圆心也在第一部雷达与第二部雷达连线的中垂线上, 距中点的位置为  $0.32L$ 。

由于第三部雷达的最大探测距离也是  $L$ , 在三部雷达能探测到的区域内的最大  $R_v$  为  $0.84L$ , 由式(15) 可以求出  $v$  分量的最大探测误差为 2.3 m/s。

## 4 结 论

由以上讨论可得出以下几点结论:

- (1) 三部多普勒天气雷达联合探测大气风场的探测误差分布与雷达布局和雷达各自的测速误差有关;
- (2) 三部多普勒天气雷达联合探测大气风场的最佳布局与各部雷达的最大探测距离和测速精度及要求的联合探测精度有关;
- (3) 在三部雷达的最大探测距离和测速精度都相同且测速精度为1 m/s 的情况下, 三部雷达以等边三角形布局为最佳, 其边长与雷达的最大探测距离和希望的探测精度有关。当探测精度要求小于2 m/s 时, 边长与最大探测距离的比值大约为0.55, 在这种情况下, 各种误差的分布如表1:

表1 误差分布特征表

误差种类	圆心坐标	分布半径	分布梯度
$\sigma_u$	$(\frac{1}{2}x_2, 0)$	$(\frac{\sigma_u^2}{2} - 1) x_2$	$\frac{4}{x_2^2} R_u$
$\sigma_v$	$(\frac{1}{2}x_2, \frac{3}{3}x_2)$	$(\frac{\sigma_v^2}{2} - \frac{1}{4}) x_2$	$\frac{4}{x_2^2} R_v$
$\sigma_{u+v}$	$(\frac{1}{2}x_2, \frac{3}{6}x_2)$	$(\frac{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}{4} - \frac{1}{3}) x_2$	$\frac{8}{x_2^2} R_{u+v}$

- (4) 在雷达布点时, 应根据监测的区域、地形、各部雷达的参数及希望的探测精度, 利用以上给出的方程和研究方法, 去确定各部雷达应在的具体位置, 及能监测的范围。

## 参考文献

- 1 Larry Armijo. A theory for determinatin of wind and precipitation velocities with Doppler radars. J Atmos Sci, 1969, 26: 570 ~ 573
- 2 Charles A, Knight and Patrick Squires. Hailstorms of the central high plain, volume : case studies of the national hail research experiment. Boulder, Colorado, U S A: Colorado Associated University Press, 1982. 42 ~

53, 131 ~ 161, 229 ~ 224

- 3 Boline A R and Srirastava R C. Randon errors in wind and precipitation fall speed measurement by a triple Doppler radar system. Preprints 17th Conference on Radar Meteorology, AMS Boston, U S A, 1976. 7 ~ 14
- 4 Joshua Wuman, M itch Randall and Chris Burghart. Real time vector winds from a ristic Doppler radar network. Preprints 27th Conference on Radar Meteorology, AMS Vail Colorado, U S A, 1995. 725 ~ 728

## A STUDY ON ERROR DISTRIBUTION AND RADAR OPTIMUM ARRANGEMENTS OF WIND FIELD MEASUREMENT WITH DOPPLER RADARS

Zhang Peiyuan He Ping Song Chunmei Ge Runsheng

*(Chinese Academy of meteorological Sciences, Beijing, 100081)*

### Abstract

It is proved from the equations of errors that the isolines of errors in wind measurement by a triple Doppler radar system are concentric circles and the more radius is, the more error is. The position of circular centre and size of radius with given error are related to relative positions among three radars and measuring velocity precisions of each radar. If the measuring velocity precisions are the same for three doppler radars, the optimum arrangement of the three radars is a equilateral triangle. The length ( $l$ ) of one side of equilateral triangle is related to measuring velocity precisions and error requirement and maximal distance ( $L$ ) of radar detection. if precision= 1 m/s and error 2 m/s, then  $l = 0.55L$ .

**Key words:** Triple doppler radar, Optimum arrangement, Error distribution.