第 58 卷 第 3 期
2000年6月
气 象 学 报
ACTA METEOROLOGICA SINICA
Vol. 58, No. 3
Jun., 2000

热带大气和海洋的半地转适应和发展运动*

巢纪平

(国家海洋环境预报研究中心,北京,100081)

摘 要

半地转适应和半地转发展是热带大气和海洋运动的两种基本形态,它们在时间上是可分的,反映了不同的物理过程。当初始扰动作用于大气或海洋时,首先将激发出重力惯性波,当重力惯性波频散后,建立起半地转的平衡状态,此后运动进入到以 Rossby 波(长波或短波)、Kelvin 波和混合波中的 Rossby 短波为主导的发展状态。文中研究的纬圈半地转适应和发展运动,是 Gill 长波近似模式的理论基础。同时研究了经圈半地转适应和发展运动,实际上这相当于短波近似模式,它可以应用到研究海洋经圈边界附近的一类问题。

关键词:半地转运动,适应过程,发展过程。

1 引 言

地转适应运动和准地转发展运动是中纬度大气和海洋中两种基本的运动形态[1],这两种形态在时间上是可分的,由不同的动力学过程制约[2,3],前者反映了重力惯性波的频散,后者是 Rossby 波的表现。把运动区分出适应阶段和发展阶段,是中纬度大气和海洋动力学研究的一大贡献,在气象学中,它对早期数值天气预报的发展起了积极的作用。

早在 1960 年代 Matsuno[4] 就指明了热带运动的最基本形态,并表明除重力惯性波、Rossby 波外,Kelvin 波和 Rossby- 重力混合波在调节热带大气和海洋环流中同样也起着重要的作用。这是热带运动不同于中纬度运动的特点之一。

另一方面,Gill[5] 引进长波近似,即纬圈半地转近似,建立了一个类似于中纬度的准地转模式,不同之处除重力惯性波被过滤以及 Rossby 波被非色散外,尚保存了 Kelvin 波和 Rossby- 重力混合波的作用。这个模式在热带大气和海洋动力学的研究中,曾有过广泛的应用。然而,Gill 模式的理论基础是不够充实的,例如纬度半地转平衡为什么能够建立、通过什么过程建立等,在物理上都没有像中纬度准地转模式的建立分析得那么清楚。

最近,巢纪平等[6] 提出了热带半地转适应的概念,并指出,当初始场存在位势涡度的纬圈梯度时,随着重力惯性波的频散,经圈流将保留下来,但经圈流的时间变化消失,从而纬圈半地转平衡建立。这样就为 Gill 模式的建立提供了一个物理基础。但是,从纬圈半地转适应状态是如何过渡到纬圈半地转发展状态的,尚需要用统一的观点和方法做出较好的处理,这正是本文的目的之一。

在另一方面,长波近似下的 Gill 模式虽然可以用来研究热带纬圈大尺度的大气和海洋运动,但对有些运动,例如海洋经圈边界附近的运动,其纬圈尺度很小,这时 Gill 模式就失效了。为此,在本文中又研究了经圈半地转的适应过程,以及在经圈半地转平衡下的发

* 初稿时间:1998 年 11 月 13 日;修改稿时间:1999 年 4 月 13 日。
资助课题:国家自然科学基金(项目号 49775260)。

展运动，而经圈半地转近似实质上相当于 Rossby 波的短波近似。这样短波近似模式和 Gill 的长波近似模式就能相互补充了，成为热带动力学中的一个较为完整的体系。

2 基本方程

当运动的物理量在垂直方向用本征模展开时，其本征值相当于等值厚度，记以 h，于是可定义重力波波速为

$$C=(gh)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

在赤道 β 平面上，引进特征量：长度为 $(C/2\beta)^{1/2}$，时间为 $(2\beta C)^{-1/2}$，速度为 C，重力位势高度为 C^2，则对任一本征模其水平运动方程相当于浅水运动方程，为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{2}yv=-\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}yu=-\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{4}$$

引进变量

$$q=\varphi+u,\quad r=\varphi-u \tag{5}$$

由此有

$$\varphi=\frac{1}{2}(q+r),\quad u=\frac{1}{2}(q-r) \tag{6}$$

于是由方程(2)～(4)给出

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{2}yv=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t}-\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}yv=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{1}{2}yq\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{1}{2}yr\right)=0 \tag{9}$$

对所有变量在 y 方向用抛物圆柱函数即 Weber 函数展开成

$$(q,r,v)=\sum_n(q_n,r_n,v_n)D_n(y) \tag{10}$$

Weber 函数有循环公式

$$\frac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{2}yD_n=nD_{n-1} \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{2}yD_n=-nD_{n+1} \tag{12}$$

考虑到函数 $D_n(y)$ 的正交性，由方程(7)～(9)给出展开式的系数方程为

$$\frac{\partial q_n}{\partial t}+\frac{\partial q_n}{\partial x}-v_{n-1}=0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial r_n}{\partial t}-\frac{\partial r_n}{\partial x}+(n+1)v_{n+1}=0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t}+\frac{1}{2}(n+1)q_{n+1}-\frac{1}{2}r_{n-1}=0 \tag{15}$$

或者,可写成

$$\frac{\partial q_0}{\partial t}+\frac{\partial q_0}{\partial x}=0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 q_1}{\partial t\partial x}+\frac{1}{2}q_1=0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial^3 q_{n+2}}{\partial t^3}-\frac{\partial^3 q_{n+2}}{\partial t\partial x^2}+\frac{1}{2}(2n+3)\frac{\partial q_{n+2}}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial q_{n+2}}{\partial x}=0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial^3 r_n}{\partial t^3}-\frac{\partial^3 r_n}{\partial t\partial x^2}+\frac{1}{2}(2n+3)\frac{\partial r_n}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial r_n}{\partial x}=0 \tag{19}$$

注意到,式(16)是Kelvin波方程,式(17)是Rossby-重力混合波方程,式(18)和(19)是描写重力惯性波和Rossby波的方程。

考虑到式(18)和(19)后,由式(15)可以得到对 v_n 的方程,为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(n+\frac{1}{2})\right]\frac{\partial v_n}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial v_n}{\partial x}=0 \tag{20}$$

这是Matsuno方程。

3 纬圈半地转适应过程

引进拉普拉斯变换

$$\hat{v}_n=\int_0^\infty v_n e^{-st}dt \tag{21}$$

则方程(20)给出

$$s\frac{d^2\hat{v}}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{d\hat{v}_n}{dx}-(s^2+n+\frac{1}{2})s\hat{v}_n$$
$$=\left[(\frac{d^2v_n^0}{dx^2}-(n+\frac{1}{2})v_n^0)-s^2v_n^0-sv'^0_n-v''^0_n\right]\equiv F_n^0(x) \tag{22}$$

式中 v_n^0 表示初始值,撇号表示对时间的微商。

方程(22)的自由方程的色散关系为

$$sk_n^2+\frac{1}{2}k_n-(s^3+(n+\frac{1}{2})s)=0 \tag{23}$$

其根为

$$k_n^+=-\frac{1}{4s}\left[1-\sqrt{1+16(n+\frac{1}{2})s^2+16s^4}\right] \tag{24}$$

$$k_n^-=-\frac{1}{4s}\left[1+\sqrt{1+16(n+\frac{1}{2})s^2+16s^4}\right] \tag{25}$$

注意到,当 s 很大时,上两式的渐近式为

$$k_n^+\approx\sqrt{(n+\frac{1}{2})+s^2} \tag{26}$$

$$k_n^- \approx -\sqrt{(n+\frac{1}{2})+s^2} \tag{27}$$

容易看出，如方程(20)略去由行星涡度梯度而造成的最后一项(即不带时间变化的项)，也即相当于过滤掉Rossby波，这时方程退化成

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}+(n+\frac{1}{2})v_n=0 \tag{28}$$

这一Kelvin方程描写的是重力惯性波，其色散关系即为式(26)和(27)。

由此可见，主导适应过程的重力惯性波和主导发展过程之一的Rossby波，在时间上是可分的，一是在初值附近的过程，一是离开初值很长时间后的过程。事实上，我们知道重力惯性波的最小频率和Rossby波的最大频率分别为[7]

$$\sigma_{\min}=C_m^{\frac{1}{2}}\left[(\frac{n+1}{2})^{\frac{1}{2}}+(\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}}\right] \tag{29}$$

$$\sigma_{\max}=C_m^{\frac{1}{2}}\left[(\frac{n+1}{2})^{\frac{1}{2}}-(\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}}\right] \tag{30}$$

它们是不相重合的。这表明适应过程和发展过程反映的是两个不同时间阶段上的过程。

现在用格林函数方法来求解方程(22)，边界条件为

$$|x|\to\infty,\quad \hat{v}_n\to 0 \tag{31}$$

在这一条件下容易求得问题的格林函数为

$$-\infty\leqslant x<\xi,G(x,\xi)=-\frac{1}{s(k_n^+-k_n^-)}e^{-k_n^+(\xi-x)} \tag{32}$$

$$\xi<x\leqslant\infty,G(x,\xi)=-\frac{1}{s(k_n^+-k_n^-)}e^{-k_n^-(\xi-x)} \tag{33}$$

方程(22)的解为

$$\hat{v}_n=\int_{-\infty}^{\infty}F_n^0(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi \tag{34}$$

或者写成

$$\hat{v}_n=-\frac{1}{s(k_n^+-k_n^-)}\left[\int_{-\infty}^{x}e^{k_n^-(x-\xi)}F(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{x}^{\infty}e^{-k_n^+(\xi-x)}F(\xi)\mathrm{d}\xi\right] \tag{35}$$

当时间很小即s很大时，式(34)的渐近式为

$$\hat{v}_n=-\frac{1}{2s\sqrt{n+\frac{1}{2}+s^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-\xi|\sqrt{n+\frac{1}{2}+s^2}}F^0(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{36}$$

由反变换给出

$$\begin{aligned}v_n=&-\frac{1}{2}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t(\frac{\mathrm{d}^2v_n^0(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}-(n+\frac{1}{2})v_n^0(\xi)-v''^0_n(\xi))\times\\&\mathrm{J}_0(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\tau^2-(x-\xi)^2})\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi-\int_{-\infty}^{\infty}v'^0_n(\xi)\mathrm{J}_0(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\sqrt{t^2-(x-\xi)^2})\mathrm{d}\xi+\\&\sqrt{n+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}v_n^0(\xi)\frac{t}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2}}\mathrm{J}_1(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\sqrt{t^2-(x-\xi)^2})\mathrm{d}\xi\Big]\end{aligned} \tag{37}$$

现在来分析公式(37)的性质。由贝塞尔函数 J_v 的渐近性态,当时间充分大时,式中第2、第3两项的贡献趋向于零,只有第一项保留下来,即当时间充分大时,由初始扰动的影响,尚存的经圈速度为

$$v_n = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\left(\frac{d^2 v_n^0(\xi)}{d\xi^2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)v_n^0(\xi) - v''^0_n(\xi)\right)\times$$

$$J_0\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\tau^2-(x-\xi)^2}\right)d\tau d\xi \tag{38}$$

其时间微分为

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^2 v_n^0(\xi)}{d\xi^2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)v_n^0(\xi) - v''^0_n(\xi)\right)\times$$

$$J_0\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\sqrt{t^2-(x-\xi)^2}\right)d\xi \tag{39}$$

由此可见,当时间充分大时,其值趋于零,于是由式(15)给出

$$r_n = (n+2)q_{n+2} \quad n \geqslant 0 \tag{40}$$

即建立起纬圈地转平衡。这是Gill长波近似成立的理论基础。

4 纬圈半地转发展过程

由于式(40)的约束,由式(13)和(14)给出方程

$$\frac{\partial q_{n+2}}{\partial t} - \frac{1}{2n+3}\frac{\partial q_{n+2}}{\partial x} = 0 \quad n \geqslant 0 \tag{41}$$

当初值为 $q_{n+1}^0(x)$,则解为

$$q_{n+2} = q_{n+2}^0\left(x + \frac{1}{2n+3}t\right) \tag{42}$$

这是以速度为 $1/(2n+3)$ 的向西传播的Rossby长波。

注意到,对于赤道对称的运动,由于Kelvin波中的速度和压力之间要求地转平衡,因此它将参与发展运动。如果 q_0 的初值为 $q_0(x)$,则方程(16)的解为

$$q_0 = q_0^0(x-t), \quad t > x \tag{43}$$

这是以速度为1的向东传播的Kelvin波。

在另一方面,当初值为

$$t = 0, q_1 = q_1^0, \frac{\partial q_1}{\partial t} = q'^0_1 \tag{44}$$

则方程(17)由拉普拉斯变换得出

$$\frac{d\hat{q}_1}{dx} + \left(s + \frac{1}{2s}\right)\hat{q}_1 = \frac{1}{s}\left(\frac{dq_1^0}{dx} + sq_1^0 + q'^0_1\right) \tag{45}$$

在 $x \to \infty, q_1 \to 0$ 的条件下,其解为

$$\hat{q}_1 = \int_{-\infty}^{x} e^{-\left(s+\frac{1}{2s}\right)(x-\xi)}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{dq_1^0(\xi)}{d\xi} + q_1^0 s q_1^0(\xi) + q'^0_1(\xi)\right)\right]d\xi \tag{46}$$

当 s 很大时,式(46)的近似解为

$$\hat{q}_1 = \int_{-\infty}^{x} q_1^0(\xi)\delta(t-(x-\xi))\mathrm{d}\xi = q_1^0(x-t) \quad t \geqslant x \tag{47}$$

式中 $\delta(t)$ 为 Delta 函数，这是混合波中的重力波波段的行为，它将参与适应过程。当 s 很小时，式(46) 的近似解为

$$q_1 = \int_{-\infty}^{x} (\frac{\mathrm{d}q_1^0(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + q'^0_1(\xi))\mathrm{J}_0(\sqrt{2(x-\xi)t})\mathrm{d}\xi \tag{48}$$

这是混合波中的 Rossby 波波段的行为。

但注意到，混合波中的 Rossby 波相当于一类短波，因此为了与长波近似在逻辑上一致，混合波中的 Rossby 短波不应当参加到发展过程中去，事实上如将 $\partial v_n/\partial t$ 的约束，也用到 $n=0$ 的情况，即用到 Matsuno 方程中混合波的情况，则由式(15) 给出

$$q_1 = 0 \tag{49}$$

即 Rossby 短波将不参与纬圈半地转适应后的发展过程。在有外源时，Gill[5] 令 q_1 与外源相平衡。由于Gill的模式是长波近似下的模式，而 q_1 保留下来与外源平衡的处理方法多少与长波假定不相一致。

5 经圈半地转适应和发展过程

如前所述，长波近似下的 Gill 模式，在对热带大气和海洋运动的研究中，有一定的局限性。因此作为相互补充，现研究经圈的半地转适应和发展过程。

注意到，方程(18) 和(19) 的算子是一样的，可以合在一起写成

$$L(q_{n+2}, r_n) = 0 \tag{50}$$

其特征值为式(24) 和(25)。当 s 很大时，其渐近值分别为式(26) 和(27)，它们相当于方程

$$L_k(q_{n+2}, r_n) = 0 \tag{51}$$

的特征根，其中算子

$$L_k = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (n + \frac{3}{2}) \tag{52}$$

方程(50) 略去不带时间的项，并对时间积分一次，由此得到 s 很大时的解同式(37)，除将 v_n 改写成 q_{n+2} 或 r_n，以及将 $n+1/2$ 改写成 $n+3/2$。于是得到结论，当时间充分大时 $\frac{\partial q_{n+2}}{\partial t}$ 及 $\frac{\partial r_n}{\partial t}$ 消失，而 q_{n+2} 及 r_n 则保留下来。并由下面的方程决定，即

$$\frac{\partial q_n}{\partial x} = v_{n-1} \tag{53}$$

$$\frac{\partial r_n}{\partial x} = (n+1)v_{n+1} \tag{54}$$

或者有

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{1}{2}[(n+1)v_{n+1} + v_{n-1}] \tag{55}$$

这是经圈半地转平衡的条件。即

$$\frac{1}{2}yv = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{56}$$

将条件(53) 和(54) 代入式(15)，得到

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial t\partial x}+\frac{1}{2}v_n=0 \tag{57}$$

这是经圈半地转平衡运动的发展方程,显然这是描写 Rossby 短波行为的方程。设条件为

$$t=0,\frac{\partial v_n}{\partial x}=\Phi_n(x) \tag{58}$$

$$x\to\infty,\quad v_n\to 0 \tag{59}$$

方程(56) 的解为

$$n\geqslant 1,v_n=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{J}_0(\sqrt{2(x-\xi)t}\Phi_n(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{60}$$

当 v_n 求得后,可由式(53) 和(54) 算出 q_{n+2} 和 r_n 以及进而可算出相应的 u_n 和 φ_n。

但要注意到,当 $n=0$ 时,由方程(15) 得到

$$\frac{\partial v_0}{\partial t}+\frac{1}{2}q_1=0 \tag{61}$$

而 q_1 是 Rossby- 重力混合波方程(17) 的解,即式(17) 当 s 很小时的解即式(48),当 q_1 算出后可直接算出 v_0。这表明混合波中的 Rossby 波波段将参与发展运动。事实上,只要表明式(57) 中的 n 从 $n=0$ 算起,则包括整个的短波活动。因为由式(53) 和(61) 即可得到

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial t\partial x}+\frac{1}{2}v_0=0 \tag{62}$$

注意到,Kelvin 波是长波近似下的产物,因此它不应参与到短波近似下的发展运动。事实上,在式(2) 中如令 $\partial u/\partial t$(短波近似) 就得到式(56),而由于 Kelvin 波中经圈速度滤失,因此这相当于把 Kelvin 波过滤掉。

6　结束语

由以上的讨论可见,即使在热带,运动也存在适应过程和发展过程,这两个过程在时间上是可分的,这一点是和中纬度大气运动的动力学特征相似的,但在这里发展运动是在纬圈或经圈半地转近似下进行的,而不是象中纬度的运动那样,发展运动是在准地转近似下进行的。在另一方面,在两个不同的纬度带,适应过程虽然都是籍重力惯性波的频散来实现的,但在发展过程中,在热带除了有 Rossby 波(退化成 Rossby 长波或 Rossby 短波)作用外,在纬圈半地转近似下尚有 Kelvin 波参与,而在经圈半地转近似下尚有重力混合波中的 Rossby 波波段参与,这在动力学行为上和中纬度是不同的。

注意到,纬圈半地转近似或长波近似虽然对热带大多数运动都是一个很好的近似,但由于长波近似下的Rossby波和Kelvin波都是非色散波,因此象波能量的传播速度不同于波信号的传播速度或反向于波信号的传播速度而造成的一些重要现象就被过滤掉了。但经圈半地转平衡下的 Rossby 短波是色散波,而且其能量是向东传播的,因此可以用来研究经圈边界附近的一些现象,这两种近似显然可以起到互补的作用。当然,用来描写热带发展运动的更好的近似,是应把长波和短波近似统一地包含在一个模式中,这我们将在另一篇文章中讨论。

参考文献

1 曾庆存. 大气中的适应过程和发展过程(一)和(二). 气象学报, 1963, 33: 163 ~ 174, 281 ~ 289
2 Yeh T C, Li M C. On the characteristics of scale of the atmospheric motion. J Meteor Soc Japan, 1982, 60, 16—23
3 叶笃正, 巢纪平. 论大气运动的多时态特征 —— 适应、发展和准定常演变. 大气科学, 1998, 22: 385 ~ 398
4 Matsuno T. Quasi geostrophic motions in the equatorial area. J Meteor Soc Japan, 1966, 44, 25—43
5 Gill A E. Some simple solution for heat-induced tropical circulation. Quart J Roy Meteor Soc, 1980, 106: 447—462
6 Chao J P, Lin Y H. The foundation and movement of tropical semi-geostrophic adaptation. Acta Meteor Sinica, 1996, 10: 129—141
7 Moore D W, Philander S G H. Modeling of the ocean circulation, In: Goldber E D, et al, Eds. The Sea; Vol 6. New York: Wiley (Interscience), 1977. 319—362

ON THE SEMI-GEOSTROPHIC ADAPTATION AND EVOLUTION MOTIONS IN THE TROPICAL ATMOSPHERE AND OCEAN

Chao Jiping

(National research center for marine environmental forecasts, Beijing, 100081)

Abstract

It is indicated that the semi-geostrophic adaptation motion and evolution motion are the two kinds of basic motion in tropics. They are separable in time and are the results of different physical processes in different phase of motion . After the gravity-inertia wave dispersion which is excited by initial disturbance, the semi-geostrophic quasi-balance state is established. In this stage, the motions are controlled by the Rossby wave (short or long wave length), and the Kelvin wave. The studies of zonal semi-geotrophic processes(long wave approximation) are the foundation of Gill model. Besides, in this paper the meridional semi-geostrophic processes (short wave approximation)are also investigated for the studies of some kinds of motions near the meritional boundary of ocean.

Key word: Semi-geostrophic motion, Adaptation process, Evolution process.