第59卷 第2期 气 象 学 报 Vol.59, No.2
2001年4月 ACTA METEOROLOGICA SINICA APR.,2001

地球旋转向量水平分量对赤道 β 平面上波动的影响*

赵 强 刘式适

(北京大学地球物理系, 北京, 100871)

摘 要

文中利用合理的赤道 β 平面近似方程组研究 β 效应和地球旋转向量水平分量(即 Coriolis 力分量 $f_* = 2\Omega\cos\varphi$)共同作用下低纬度大气波动的特征。定性结果分析表明, 若扰动与纬度有关(混合 Rossby-重力波和 Rossby 波), f_* 虽然不影响波动传播的频率特征, 但修改其决定波动经向结构的振幅。如果扰动与纬度无关(Kelvin 波), 则 f_* 的影响消失, 这与 $f_* - f$ 平面上波动的情况显然不同。

关键词: 科里奥利力, β 效应, 波动影响。

1 引 言

地球旋转对于地球物理流体力学中的许多现象都有深刻影响, 它的作用是通过在流体动力学方程中出现额外加速度项 $2\Omega\times\boldsymbol{V}$, 其中 $\Omega = \Omega(0, \cos\varphi, \sin\varphi)$ 为 Coriolis 矢量, $\boldsymbol{V} = (u, v, w)$ 是三维速度矢量, Ω 是地球旋转角速度, φ 是纬度。省略地球旋转作用的水平分量 $f_* = 2\Omega\cos\varphi$(它出现在动量方程的纬向和垂直分量上) 可以说是"传统近似", 然而就动力学角度而言也一直是个有争议的问题[1~4]。近年来, 在地球物理流体动力学的许多研究中, Coriolis 力分量 f_* 的作用也越来越引起人们的重视[5~8]。众所周知, 控制或影响低纬度大气动力学的基本因子之一是所谓 β 效应, 这就是许多低纬度大气动力学问题中广泛采用"赤道 β 平面近似", 即 $f = \beta y$ 的主要原因。然而, Coriolis 参数的另一分量 $f_* = 2\Omega\cos\varphi$ 在低纬度也显得较为重要, 并且近似为常数。事实上, 可以利用在纬向方程中的 $2\Omega w\cos\varphi$ 项和 $-2\Omega v\sin\varphi$ 项相比较来估计其作用大小。例如, 对于热带地区的大尺度运动, 其一级近似为所谓 Sverdrup 型平衡[9, 10], 则由

$$\frac{2\Omega v\cos\varphi}{a} = 2\Omega v\sin\varphi\frac{\partial w}{\partial z}$$

可得到

$$\frac{2\Omega w\cos\varphi}{2\Omega v\sin\varphi} \approx \frac{H}{a}\cot^2\varphi \tag{1}$$

其中 a 为地球半径, 如果 $H = 10^4$ m, 在 $\varphi = 6$ 时 $(H/a)\cot^2\varphi$ 大约为0.1, 在 $\varphi = 2$ 时它接近于1。这清楚地表明: 当研究热带地区大尺度运动时, 纬向运动方程中的 $2\Omega w\cos\varphi$ 是不能省略的。如果在纬向动量方程中保留了 $2\Omega w\cos\varphi$ 项, 那么为了保持能量守恒的一致性在垂直动量方程中也必须保留 $-2\Omega u\cos\varphi$ 项(即 Coriolis 力对流体运动不作功)。而且, 可以证明在大尺度运动(特征尺度 $L = 10^6$ m, $U = 10$ m/s 和 $H = 10^4$ m) 中与 $-2\Omega u\cos\varphi$ 相比较是 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ 可以省略的。

* 初稿时间: 1999年1月13日; 修改稿时间: 1999年9月5日。

资助课题: 高等学校骨干教师资助计划项目。

由
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \approx \frac{UW}{L} \leq \frac{U^2H}{L^2}$$
可得到
$$\frac{\mathrm{d}w/\mathrm{d}t}{2\Omega u} \leq \frac{UH}{2\Omega L^2} = \frac{H}{L}R_0 \approx 10^{-3} \tag{2}$$

Draghici[7]注意到在中尺度运动($L=10^5$ m, $H=10^4$ m, $R_0\approx 1$) 的范围内也有 $-2\Omega u\cos\varphi$大于 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$, 因此, 他认为在这种情况下 $-2\Omega u\cos\varphi$代表着非常重要的非静力效应。尽管 $-2\Omega u\cos\varphi$与重力相比较是很小的, 因此在垂直动量方程中的 $-2\Omega u\cos\varphi$项就显得无足轻重, 但是, 这并不是 $-2\Omega u\cos\varphi$重要性的普遍度量。例如, 对于中纬度大尺度准地转运动, 根据实际经验知道地转偏差和地转风相比较是很小的, 但是它体现了运动的不平衡性, 是引起天气系统发生发展的一个重要因子。因此, 有必要分析 Coriolis 力分量 f_* 在低纬大气动力学中的作用。

2　基本方程组及解析解分析

考虑 f_* 作用和赤道 β 平面近似, 绝热和无摩擦 Boussinesq 流体运动的控制方程组为
$$\begin{cases} \mathrm{d}u/\mathrm{d}t - \beta y v = -\partial\Phi/\partial x - f_* w \\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}t + \beta y u = -\partial\Phi/\partial y \\ -g\theta/\theta_0 = -\partial\Phi/\partial z + f_* u \\ \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0 \\ \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \tag{3}$$
其中 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z$, θ_0 为位温的典型值, 其它符号如常规所用。Grimshaw[11]曾指出合理的 β 平面近似方程组中 Coriolis 参数的水平分量为常数; 垂直分量随纬度变化, 这种特性使得 β 平面近似方程组保持角动量守恒原理和涡度守恒原理。因此, 方程组(3) 是较为合理的赤道 β 平面近似。为了讨论大尺度扰动的特征, 先将方程组(3) 相对于静止状态线性化, 即引进小扰动: $u=u'$, $v=v'$, $w=w'$, $\Phi=\bar{\Phi}(z)+\Phi'$, $\theta=\bar{\theta}(z)+\theta'$。其中 $\bar{\Phi}(z)$ 和 $\bar{\theta}(z)$ 分别代表基本位势高度场和位温场, 基本状态满足静力平衡 $g\bar{\theta}/\theta_0=\partial\bar{\Phi}/\partial z$。线性化后的方程组(略去撇号和消去变量 θ') 为
$$\begin{cases} \partial u/\partial t - \beta y v = -\partial\Phi/\partial x - f_* w \\ \partial v/\partial t + \beta y u = -\partial\Phi/\partial y \\ \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0 \\ \partial/\partial t(\partial\Phi/\partial z) + N^2 w = f_*\partial u/\partial t \end{cases} \tag{4}$$
其中 $N^2=(g/\theta_0)\partial\bar{\theta}/\partial z$ (N 是 Brunt–Vaisala 频率)。为了讨论赤道大气波动的基本特征, 需要确定赤道大气运动中波长与频率之间的色散关系。注意到(4) 中除连续方程外都是变系数方程, 因此, 应用正交模法时可假定方程组(4) 有如下形式的谐波解
$$(u, v, w, \Phi) = [U(y), V(y), W(y), \Phi(y)]\exp[i(kx+nz-\omega t)] \tag{5}$$
其中 k 和 n 分别为纬向波数和垂直方向波数; ω 为圆频率; 振幅 $U(y)$, $V(y)$, $W(y)$, $\Phi(y)$ 决定波动的经向结构。将式(5) 代入式(4) 消去 W, Φ, U, 得到
$$(N^2+f_*^2)\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}y^2} + 2if_*\beta ny\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} + \left[\omega^2n^2 - k^2N^2 + \frac{\beta(if_*n\omega - kN^2)}{\omega} - \beta^2n^2y^2\right]V = 0 \tag{6}$$
式(6) 为文中所考虑模式中大气波动运动的普遍控制方程。因为这里讨论的是赤道附近的波动运动, 在远离赤道时可以认为波动消失, 所以可取如下边界条件。
$$y\to\pm\infty \qquad V\to 0 \tag{7}$$

可以依据式(6)来讨论 Coriolis 参数分量 f_* 对赤道 β 平面上波动的影响。为了求解方程(6)在边界条件(7)下的解,可作如下数学变换:

$$V(y) = G(y)\exp\left[-\frac{if_*\beta n y^3}{2(N^2+f_*^2)}\right] \tag{8}$$

$$X = \sqrt{\frac{\beta n N}{N^2+f_*^2}}\,y \tag{9}$$

则方程式(6)和边界条件(7)就简化为以下所谓 Weber 方程的本征值问题。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}X^2} + \left[\dfrac{c_1}{\beta}\left(\dfrac{\omega^2}{c_1^2} - k^2\right) - \dfrac{kc_1}{\omega} - X^2\right]G = 0 \\ G_{x\to\pm\infty} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

其中 $c_1 \equiv N/n$ 为重力波速,这就是 Matsuno 讨论过的方程[12]。方程(10)在边界条件下具有非零解的条件(即本征值)为

$$\frac{c_1}{\beta}\left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2\right) - \frac{kc_1}{\omega} = 2m+1 \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{11}$$

相应的本征函数为

$$G(X) = C_m e^{-\frac{1}{2}X^2} H_m(X) \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{12}$$

其中 C_m 是任意常系数,$H_m(X)$ 为 m 阶 Hermite 多项式。式(11)就是该模式中热带大气波动运动的频率方程,它的3个根近似为

$$\omega^{(1)} = -\frac{\beta k}{k^2 + (2m+1)\beta/c_1} \qquad (m \geq 0) \tag{13}$$

$$\omega^{(2,3)} = \begin{cases} \pm\sqrt{k^2c_1^2 + (2m+1)\beta c_1} & (m \geq 1) \\ kc_1/2 \pm \sqrt{(kc_1/2)^2 + \beta c_1} & (m = 0) \end{cases} \tag{14}$$

显然,式(13)描述低纬斜压 Rossby 波,而式(14)是低纬惯性重力内波和所谓混合 Rossby-重力波,这与 Matsuno 未考虑 Coriolis 参数分量 f_* 作用所得结果是相同的,Coriolis 参数分量 f_* 并不影响波动传播的频率特征。然而与未考虑 Coriolis 参数分量 f_* 作用所得结果不同的是在波动的振幅上,由式(9)和(12),我们可求得决定波动经向结构的振幅为

$$V(y) = C_m\exp\left[-\frac{\beta n(if_*y+N)y^2}{2(N^2+f_*^2)}\right]H_m\left(\sqrt{\frac{\beta nN}{N^2+f_*^2}}\,y\right) \tag{15}$$

由式(15)可以明显看出 Coriolis 参数分量 f_* 对波动振幅的影响,这与 $f-f_*$ 平面上的情况显然不同[13]。另外,对于 Kelvin 波($\upsilon=0$),由此而来 Kelvin 波的频率 $\omega=kc_1$,振幅也与 f_* 无关,可见 f_* 的影响消失。

3 结 论

文中研究 β 效应和 Coriolis 参数水平分量 f_* 共同作用下低纬度大气波动的特征。定性结果分析表明,若扰动与纬度有关,Coriolis 力分量 f_* 虽然不影响波动传播的频率特征,但修改其决定波动经向结构的振幅,这与 Beckman 和 Diebels[13] 所讨论 $f-f_*$ 平面上波动的情况是不相同的;如果扰动与纬度无关,则 Coriolis 参数分量 f_* 的影响消失,这一点也与 Sun[5] 研究 $f-f_*$ 平面波动稳定性的结论是一致的。

参考文献

1 Phillips N A. The equations of motion for a shallow rotating atmosphere and the 'traditional approximation'. J Atmos Sci, 1966, 23: 626– 628
2 Phillips N A. Reply to G Veronis's comments on Phillips (1966). J Atmos Sci, 1968, 25: 1155– 1157
3 Veronis G. Comments on Phillips's (1966) proposed simplification of the equations of motion for a shallow rotating atmosphere. J Atmos Sci, 1968, 25: 1154– 1155
4 Wangsness R K. Comments on "The equations of motion for a shallow rotating atmosphere and the 'traditional approximation'". J Atmos Sci, 1970, 27: 504– 506
5 Sun W Y. Unsymmetrical symmetric instability. Q J R Meteoro Soc, 1995, 121: 419– 431
6 White A A, Bromley R A. Dynamically consistent, quasi-hydrostatic equations for global models with a complete representation of the Coriolis force. Q J R Meteoro Soc, 1995, 121: 399– 418
7 Draghici I. Non-hydrostatic Coriolis effects in an isentropic coordinate frame. Meteorol Hydrol, 1987, 17: 45– 54
8 Leibovich S, Lele S K. The influence of the horizontal component of the Earth's angular velocity on the instability of the Ekman layer. J Fluid Mech, 1985, 150: 41– 87
9 Burger A P. The potential vorticity equation: from planetary to small scale. Tellus, 1991, 43A: 191– 197
10 Hoskins B J, Karoly D J. The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing. J Atmos Sci, 1981, 38: 1179– 1196
11 Grimshaw R H J. A note on the β-plane approximation. Tellus, 1975, 27: 351– 357
12 Matsuno T. Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. J Meteor Soc Japan, 1966, 44: 25– 43
13 Beckman A, S Diebels. Effects of the horizontal component of the Earth's rotation on wave propagation on the f-plane, Part I: Barotropic Kelvin waves and amphidromic systems. Geophys Astrophys Fluid Dynam, 1994, 76: 95– 119

INFLUENCE OF THE HORIZONTAL COMPONENT OF THE EARTH'S ROTATION ON WAVES ON THE EQUATORIAL β-PLANE

Zhao Qiang Liu Shikuo

(*Department of Geophysics, Peking University, Beijing* 100871)

Abstract

A horizontal component of the earth's rotation ($f_* = 2\Omega\cos\varphi$) is included in a set of linearized β-plane equations, which have a constant horizontal component of the Coriolis parameter, while the vertical component varies with latitude. This feature of the equations enables the vorticity and angular momentum principles to hold in their usual form, to study the influence of the f_*-effect on waves on the equatorial-plane. The results show that the f_*-effect can be important if the perturbations are the function of latitude. Although f_* has no effects on the frequencies of the mixed Rossby-gravity and Rossby waves, it modifies their amplitude. We also find that when the perturbations are independent of latitude (e.g. Kelvin waves), the f_*-effect disappears.

Key words: Coriolis force, β effect, Influence of waves.