

水平切变线上涡层不稳定理论

高守亭 周玉淑

(中国科学院大气物理研究所,
大气边界层物理和大气化学国家重点实验室, 北京, 100029)

摘 要

文中打破了传统的 Kelvin-Helmholtz 研究切变不稳定的观点, 考虑了强涡度切变存在时切变线已构成了一个涡层, 这时切变线的不稳定问题就变为涡层的不稳定问题。同时考虑由涡层所产生的诱导速度, 从理论上得到了水平切变线上涡层不稳定必要条件的判据, 即必须满足 $(1 - R_v + R_w) > 0$, 且有 $U(y, t) > U(A(t))$ 与之相配合。这表明环境场的配置制约着切变线上扰动的发展, 这种中尺度扰动同环境场存在着相互作用。文中还用具体个例对如何计算不稳定必要条件做了解释和说明。

关键词: 切变线, 诱导速度, 涡层不稳定。

1 引 言

稳定性问题最早见于流体力学, 在一百年前, Helmholtz^[1], Kelvin^[2]和 Rayleigh^[3]就研究了切变流中不稳定的必要条件, 得出基本流剖面应有一个拐点。后来这个必要条件由 Fjortoft^[4]完善为在流场某处必有 $U(U - U_s) < 0$ 。同 Rayleigh 同时代的 Reynolds^[5]对管道流的稳定性做了一系列的实验, 对管道流得出 Reynolds 数 R_e 大于临界值 ($R_{ec} = 13000$) 时即发生不稳定。Lin^[6]较详细地研究了正压切变流和粘性流的稳定性问题。Howard^[7]在研究非均匀切变流的稳定性时得到 Howard 半圆定理。郭晓岚^[8]把 Rayleigh 的结果推广到旋转大气中, 得到了大气运动正压不稳定的必要条件。Charney^[9]和 Eady^[10]提出了斜压不稳定理论。Stone^[11]研究了对称不稳定。之后对稳定性的研究越来越多, 从线性、弱非线性到非线性, 从保守系统到耗散系统。如 Arnold^[12, 13]首次把变分原理与先验估计方法结合起来研究了平面上无粘不可压定常流的非线性稳定性问题。中国气象学者对稳定性也做

* 初稿时间: 1991 年 9 月 1 日; 修改稿时间: 2000 年 4 月 3 日。
资助课题: “我国重大气候和天气灾害形成机理与预测理论研究”项目(G1998040907); 国家自然科学基金重点课题“中尺度强对流动力学研究”(49735180)。

过不少研究,如高守亭等^[14]用理查逊数做为判据研究了对称不稳定的高级近似。曾庆存^[15]发展了一种广义变分方法来研究大气的非线性不稳定,陆维松^[16]研究了摩擦耗散和非线性正压不稳定。Gao Shouting, et al^[17]从波流相互作用的观点研究急流加速诱导低层锋生的不稳定性问题。穆穆^[18]研究了准地转流的非线性不稳定。除此之外,还有不少博士、硕士论文以及专著(陆维松^[19])都在论述及研究不同类型的非稳定问题。同时在研究方法上,对线性问题主要用标准模法,对非线性问题主要有高截谱法, A-B 混合方程法、变分法及广义能量法等。

以上只列举了关于稳定性研究的几个主要方面,尚有大量没有列举的众多研究,可见对正压、斜压以及对称不稳定线性及非线性问题已经研究了方方面面,但不足的是对切变线上的涡层不稳定问题研究很少。Scorer^[20]首次研究了垂直切变流区内的涡层不稳定及定常涡的不稳定问题, Gao Shouting^[21]研究了真实大气中的切变线的涡层不稳定问题。本文则针对具有水平切变流区的涡层不稳定问题进行了研究,找出存在不稳定的必要条件,为研究中国长江流域切变线上的涡层不稳定打下了理论基础。文中就涡层不稳定对环境场的要求进行了较细致的探讨。

2 切变线上涡层不稳定理论分析

对切变流研究而得到的 K-H 不稳定的条件是(Scorer^[20])

$$\frac{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 + \rho_1)g}{\rho_1 \rho_2} \frac{g}{K} < (U_1 - U_2)^2 \quad (1)$$

这里 ρ_2, U_2 和 ρ_1, U_1 分别是上下层流体的密度和基本速度。可以看出若 $U_1 - U_2$, 总存在着一个波数范围 K 对应不稳定波。但当密度差很小, 并是静力稳定时, 式(1)可以被化为

$$K > K_c = 2g \frac{\frac{\rho}{\rho_2}}{(\Delta U)^2} \quad (2)$$

这里 $\rho = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}$, $\rho_2 - \rho_1 = \Delta\rho$, $\rho_1 \rho_2 = \rho^2$ 这时理查逊数可以写为

$$R_i = \frac{2g\Delta\rho}{K\rho(\Delta U)^2} = \frac{K_c}{K} < 1 \quad (3)$$

这是早期 K-H 不稳定的结果,但这种结果有如下两个方面的缺点,其一是如果速度梯度很大,则粘性效应变得重要应当考虑;其二是速度的梯度的增加及不连续,实际上就构成了一个薄的涡层,在涡层内由于涡度的作用就会产生诱导速度从而影响涡层的稳定性,正是如此,才提出了切变流的涡层稳定性问题。

长江流域切变线是造成大到暴雨的重要天气系统之一。特别是在梅雨期, 700 hPa 或 850 hPa 上的切变线在长江流域持续维持,造成该地区持续降水。在切变线上经常形成类“涡街”式的中尺度低值系统,凡是中尺度低值系统形成的地方,降水强度明显加大,使得切变线降水表现为十分不均匀,在低值系统发展区,经常出现暴雨甚至大暴雨。从理论上来说,造成这种低值系统的原因,应归结为切变线上涡层的不稳定。这种不稳定的发生对

环境场(如风场、温度场等)都有一定的要求,体现了强暴雨系统发生过程中不同尺度系统之间的相互作用,从这个意义上说,切变线上涡层不稳定的研究也是强暴雨系统发生过程中不同尺度系统相互作用的研究。

由于在切变线上速度的不连续,所以在切变线薄层内出现一个大的速度梯度,构成一个涡层。图 1 是受扰动的切变线或说涡层的示意图。从图中看出若设涡层厚度为 Δy , 且在此厚度内的涡度为 $\eta = -\frac{\partial U(y, t)}{\partial y}$, 它是一个垂直于切变线所在平面的涡度分量。

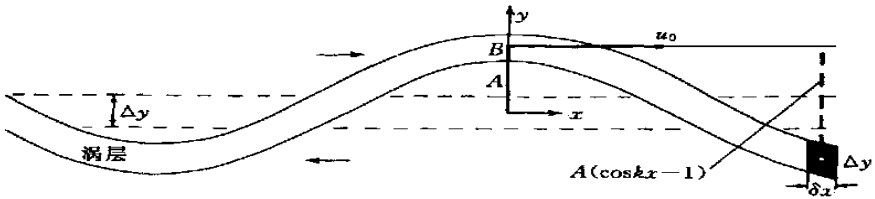


图 1 切变线上受扰动的涡层示意

若涡层内扰动所遭受的位移为 $\zeta = A(t) \cos kx$ 。如图 1 内建立的坐标关系,相对于波脊中心 B (坐标为 $0, A(t)$) 的坐标为 $[x, A(t)(\cos kx - 1)]$ 而长度为 δx 的涡元为 σ , 其具有的涡度为 $\Delta y \delta x$, 根据点涡诱导速度原理(童秉纲等^[22]) 则知由此涡元引起的诱导速度在 B 点的 i 方向上的水平分量可表示为:

$$u_i = \frac{\eta \Delta y \delta x}{2\pi \frac{x^2 + (A(t)(\cos kx - 1))^2}{x}} = \frac{A(t)(1 - \cos kx)}{x^2 + (A(t)(\cos kx - 1))^2} \frac{\eta \Delta y \delta x}{2\pi x} A(t)(1 - \cos kx) \quad (4)$$

这里忽略了 $A^2(t)$ 含的那些项, 因为是小扰动, $A(t)$ 的量级本身就很小。

由式(4), 则可得到 B 点的总体 i 方向上的诱导速度为

$$u_o = \int -\frac{\eta \Delta y A(t)(1 - \cos kx)}{2\pi x^2} dx = \frac{\eta \Delta y A(t)}{\pi} \int \frac{\sin \frac{1}{2} kx}{x^2} dx = \\ -\frac{\eta \Delta y A(t)}{\pi} \left[\frac{1}{x} \sin^2 \frac{1}{2} kx \right] + \frac{\eta \Delta y A(t)}{2\pi} \int k \frac{\sin kx}{x} dx = \\ \frac{\eta \Delta y A(t)}{2\pi} \int k \frac{\sin kx}{x} dx \quad (5)$$

因为 $\int k \frac{\sin kx}{x} dx = k\pi$, 则知式(5)的最后结果为

$$u_o(y, t) = \frac{\eta \Delta y A(t) k}{2} \quad (6)$$

而由对称性可知, 在 B 点积分后的诱导速度的 j 方向分量因互相抵消而为零。

只要知道了 u_o , 涡层内任一点的诱导速度 i 方向上的水平分量则可以表示为:

$$u(x, y, t) = \int -\frac{\eta \Delta y A(t)(\cos kx_1 - \cos kx)}{2\pi(x - x_1)^2} dx = \frac{1}{2} \eta \Delta y A(t) k \cos kx_1$$

变动 x_1 即有

$$u(x, y, t) = u_0 \cos kx = \frac{1}{2} \eta \Delta A(t) k \cos kx \quad (7)$$

由于涡层的厚度为 Δy , 作为一种近似, 可认为式(7) 满足 Δy 厚度的整个涡层。因此, 可在涡层内对诱导速度分量取关于 x 或者关于 y 的偏导数。又因为诱导速度是速度的有旋部分, 所以它在涡层内是水平无辐散的, 即 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ 。

因此, 利用无辐散条件及式(7) 可得到

$$v = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + c(x, t) = - \frac{1}{2} \Delta y A(t) k \cos kx \eta dy + c(x, t) \quad (8)$$

因为 $\eta = - \frac{\partial U(y, t)}{\partial y}$ 是环境场涡度, 则式(8) 可写为

$$v = \frac{1}{2} \Delta y U(y, t) A(t) k \cos kx + c(x, t) \quad (9)$$

这里 $U(y, t)$ 是环境场的纬向速度分量。由于扰动相对 y 轴坐标具有对称性, 则依据诱导速度的计算可知, 凡是在处 $kx = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ 及 $2k\pi$ 处 ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$), 诱导速度 $v = 0$, 利用这一特征, 由式(9) 则可定出

$$c(x, t) = - \frac{1}{2} \Delta y U(A(t)) A(t) k \cos kx \quad (10)$$

这里 $U(A(t))$ 是离切变线距离 y 为 $A(t)$ 时的环境场的纬向风速, 并认为此处的纬向风速与时间无关, 即为定常的。

这里利用了 $U(A(t)) = U(-A(t))$ 的条件, 即认为在切变线两侧, 且距切变线距离为 $A(t)$ 处的速度值的大小相等, 只是其方向相反。因此式(9) 最后可写为

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2} \Delta y U(y, t) A(t) k \cos kx - \frac{1}{2} \Delta y U(A(t)) A(t) k \cos kx \quad (11)$$

由涡度方程*

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega - \omega \cdot \nabla \mathbf{v} + (\omega \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{R} \Lambda (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \quad (12)$$

对主要是成水平运动的切变线而言, 其涡度主要是垂直分量, 即 $\omega = \omega k$

这里

$$\begin{aligned} \omega(x, y, t) &= [\eta + f + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)] k \\ &= (\eta + f + \frac{1}{2} \Delta U_y U(A(t)) A(t) k^2 \sin kx - \\ &\quad \frac{1}{2} \Delta y U(y, t) A(t) k^2 \sin kx - \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y A(t) k \cos kx) k \end{aligned}$$

f 是牵连涡度, 视为常数。

* 见附录。

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{\rho} \nabla \rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \mathbf{j} & \mathbf{g} &= -g \mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = [(\bar{u} + u) \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}] [(\bar{u} + u) \mathbf{i} + v \mathbf{j}] \\ \bar{u}(y, t) &= \frac{U_1(y, t) + U_2(y, t)}{2} \end{aligned}$$

由水平无辐散条件及 $\omega = \omega \mathbf{k}$, 而知式(12)可写为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega + R\Lambda(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \quad (13)$$

因为 $\mathbf{R} \times \mathbf{g} = -g \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \mathbf{i}$ 不在 \mathbf{k} 方向上, 且此项的量级很小一般为 10^{-7} , 所以此项对 \mathbf{k} 方向上的涡度分量没有贡献。又因为

$$\begin{aligned} & [(\bar{u} + u) \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u) + v \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} + u)] \mathbf{i} - [\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}] \mathbf{i} \\ &= [-\bar{u} A(t) \frac{1}{2} \Delta y \eta k^2 \sin kx + \frac{1}{2} \Delta y U(y, t) \frac{\partial u}{\partial y} A(t) k \cos kx - \\ & \quad \frac{1}{2} \Delta y U(A(t)) \frac{\partial u}{\partial y} A(t) k \cos kx] \mathbf{i} \end{aligned}$$

这里忽略了含 $A^2(t)$ 的那些项, 因为 $A(t)$ 是小振幅。故有

$$\begin{aligned} -R\Lambda \mathbf{a} &= R[\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}] \mathbf{k} \\ &= R[-\frac{1}{2} \bar{u} A(t) \eta \Delta y k^2 \sin kx + \frac{1}{2} \Delta y U(y, t) \frac{\partial u}{\partial y} A(t) k \cos kx - \\ & \quad \frac{1}{2} \Delta y U(A(t)) \frac{\partial u}{\partial y} A(t) k \cos kx] \mathbf{k} \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega &= -[(\bar{u} + u) \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}] (\eta + f + \frac{1}{2} \Delta y U(A(t)) A(t) k^2 \sin kx - \\ & \quad \frac{1}{2} \Delta y U(y, t) A(t) k^2 \sin kx - \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y A(t) k \cos kx) \mathbf{k} \\ &= (-\frac{1}{2} \bar{u} \Delta y U(A(t)) A(t) k^3 \cos kx + \frac{1}{2} \bar{u} \Delta y U(y, t) A(t) k^3 \cos kx - \\ & \quad \frac{1}{2} \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y A(t) k^2 \sin kx - \frac{1}{2} \Delta y U(y, t) \frac{\partial \eta}{\partial y} A(t) k \cos kx + \\ & \quad \frac{1}{2} \Delta y U(A(t)) \frac{\partial \eta}{\partial y} A(t) k \cos kx) \mathbf{k} \end{aligned}$$

这里忽略了含 $A^2(t)$ 的那些项。因此式(13)可以被表示为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega + R\Lambda(\mathbf{g} - \mathbf{a})$$

$$\begin{aligned}
 = & \left[-\frac{1}{2}\bar{u} \Delta y U(A(t)) A(t) k^3 \cos kx + \frac{1}{2}\bar{u} \Delta y U(y, t) A(t) k^3 \cos kx - \right. \\
 & \left. \frac{1}{2}\bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y A(t) k^2 \sin kx - \frac{1}{2} \Delta y U(y, t) \frac{\partial \eta}{\partial y} A(t) k \cos kx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \Delta y U(A(t)) \frac{\partial \eta}{\partial y} A(t) k \cos kx \right] k + R \left[-\frac{1}{2}\bar{u} \Delta y \eta A(t) k^2 \sin kx + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \Delta y U(y, t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} A(t) k \cos kx - \frac{1}{2} \Delta y U(A(t)) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} A(t) k \cos kx \right] k
 \end{aligned} \quad (14)$$

特别是在 $\tan kx = 0, \cos kx = 1$ 的那些点上, 满足 $\frac{\partial \omega}{\partial t} > 0$ 的条件是

$$\begin{aligned}
 & -\bar{u} U(A(t)) k^2 + \bar{u} U(y, t) k^2 - U(y, t) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \\
 & U(A(t)) \frac{\partial \eta}{\partial y} + U(y, t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} R - U(A(t)) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} R > 0
 \end{aligned} \quad (15)$$

或写为

$$U(A(t)) \left(-\bar{u} k^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} R \right) + U(y, t) \left(\bar{u} k^2 - \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} R \right) > 0$$

则有

$$-U(A(t)) \left(\bar{u} k^2 - \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} R \right) + U(y, t) \left(\bar{u} k^2 - \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} R \right) > 0$$

若 $(\bar{u} k^2 - \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} R) > 0$, 则有 $-U(A(t)) + U(y, t) > 0$

导出

$$U(y, t) > U(A(t)) \quad (16)$$

对 $(\bar{u} k^2 - \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} R) > 0$, 则可进一步写为

$$\left(1 - \frac{\partial \eta}{\bar{u} k^2 \partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\bar{u} k^2 \partial y} R \right) > 0$$

或表示为

$$(1 - R_v + R_{id}) > 0 \quad (17)$$

这里 R_v 被称为切变理查逊数, R_{id} 被称为混合理查逊数。

如果不考虑密度的水平变化, 则有混合理查逊数 R_{id} 为零, 因此由(17)可导出

$$R_v < 1 \quad (18)$$

这就极类似于以往研究中尺度系统中切变不稳定的结果。可见(16)和(17)共同构成了切变线上涡层不稳定的必要条件。即

$$\begin{cases} (1 - R_v + R_{id}) > 0 \\ \frac{U(y, t)}{U(A(t))} > 1 \end{cases} \quad (19)$$

这里有 $U(A(t)) > 0$ 。

对 $(\bar{u} k^2 - \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} R) < 0$, 则得到

$$\begin{cases} (1 - R_v + R_{id}) < 0 \\ \frac{U(y, t)}{U(A(t))} < 1 \end{cases} \quad (20)$$

尽管式(20)中条件 $\frac{U(y, t)}{U(A(t))} < 1$ 在切变线上是很容易自动满足的, 但因为通常 $\bar{u} k^2 \gg \frac{\partial \eta}{\partial y}$, 所以条件 $(1 - R_v + R_{id}) < 0$ 不能成立。因此式(20)不能作为不稳定条件的判据。

在不稳定必要条件式(19)成立的前提下, 则条件本身说明对不稳定波的扰动波长是有选择的, 即必须有

$$k^2 - \frac{1}{\bar{u}} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} R \quad (21)$$

对长江流域构成涡层的切变线来说, 则必有 $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ 非常大, 通常在 $10^{-7} \sim 10^{-8}$ 量级(如果 $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ 比较小, 则这种切变线一般不被视为具有涡层的切变线), 所以不等式(21)中主要取决于 $\frac{1}{\bar{u}} \frac{\partial \eta}{\partial y} \sim 10^{-8} \sim 10^{-9}$, 由此项决定的最佳扰动波长 $L = \frac{1}{k}$ 通常是 $10 \sim 100$ km, 这是较典型的切变线上的中尺度扰动。从以上的理论分析可以看出, 若涡层很强, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ 非常大, 如 $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ 取 $10^{-5} \sim 10^{-6}$, 那么最佳的扰动波长 $L = \frac{1}{k}$ 将变短为 $600 \sim 1000$ m, 这同切变线上雨团的扰动量级相对应。可见, 切变越强, 使得不稳定扰动波长越短。

3 切变线上涡层不稳定实例分析

1998年7月21~24日中国长江流域出现了一次明显的切变线上涡层不稳定发展过程。7月21日00 UTC, 850 hPa 形势图上在长江流域的 30°N 附近有一条东西走向的切变线(图略), 对应这条切变线长江流域自 $110^\circ \sim 118^\circ \text{E}$ 有一条弱的平均日雨量在 15 mm 左右的降水带(图略)。

24 h 后的7月22日00 UTC, 长江流域切变线较稳定少动(图2), 与这条切变线对应的

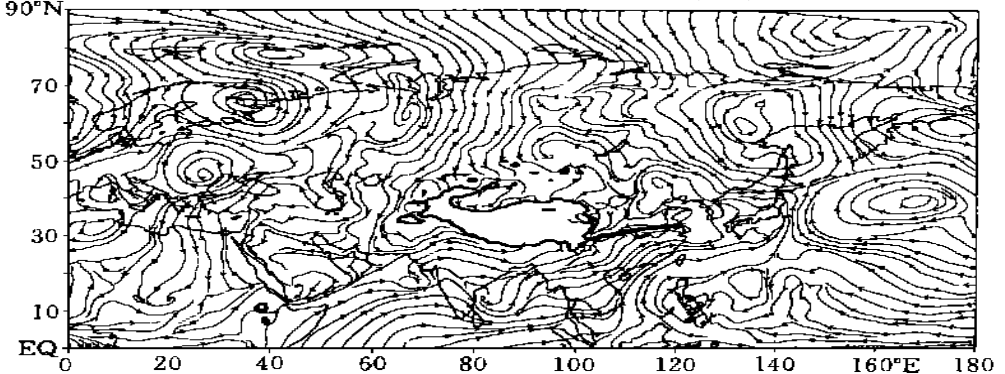


图2 1998年7月22日00UTC 850 hPa 上流线
(粗实线是切变线, 空白处是青藏高原)

降水量比前一天较大,且出现不均匀分布。在切变线中部的110 E 附近发生了局地100 mm 以上的日降水量最大中心(图3), 这表明切变线上已有中尺度系统发展,已出现了不稳定。

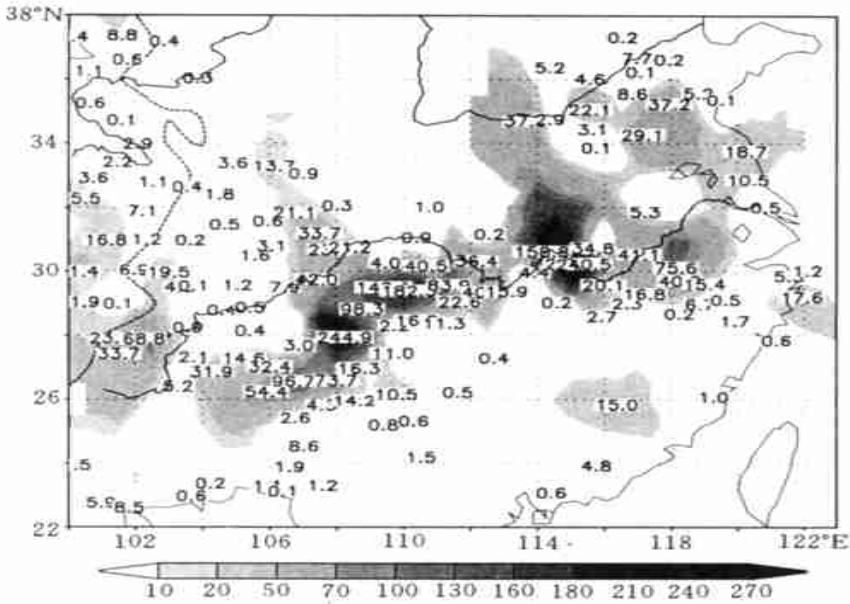


图3 1998年7月22日00UTC 降水实况

(图中数字: 24 h 降水量, 单位: mm)

图4、图5分别是7月23日00 UTC 及7月24日00UTC 850 hPa 上的流场图。从这两张图上可以清楚地看出由于中尺度扰动的发展(由于是中尺度系统在天气尺度的流线上并不能显示出来)使得切变线已成波动型分布,且这时切变线对应的日降水量雨带分布上出现了明显的多暴雨中心(图6)。如80 mm 以上的暴雨中心出现在30 N, 118 E 附近, 60 mm 以上的暴雨中心出现在28 N, 110 E 附近, 50 mm 以上的暴雨中心出现在30 N, 114 E 附

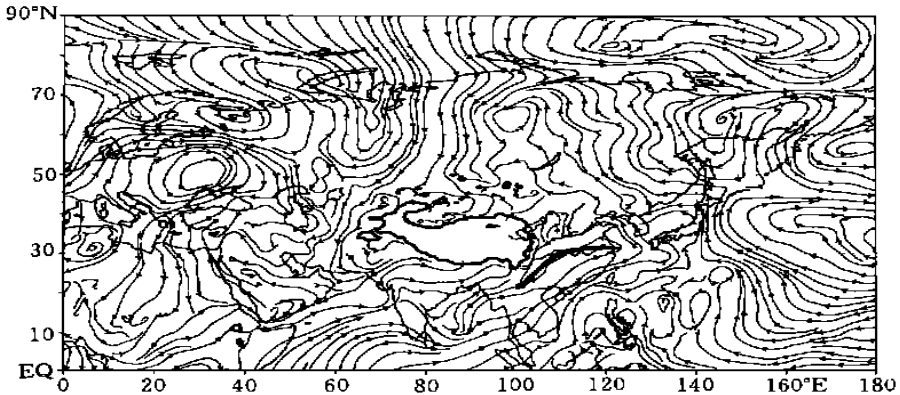


图4 1998年7月23日00UTC 850 hPa 上流线

(粗实线是切变线, 空白处是青藏高原)

近, 表现了由于切变线不稳定的发展引起的中尺度雨团的活跃。

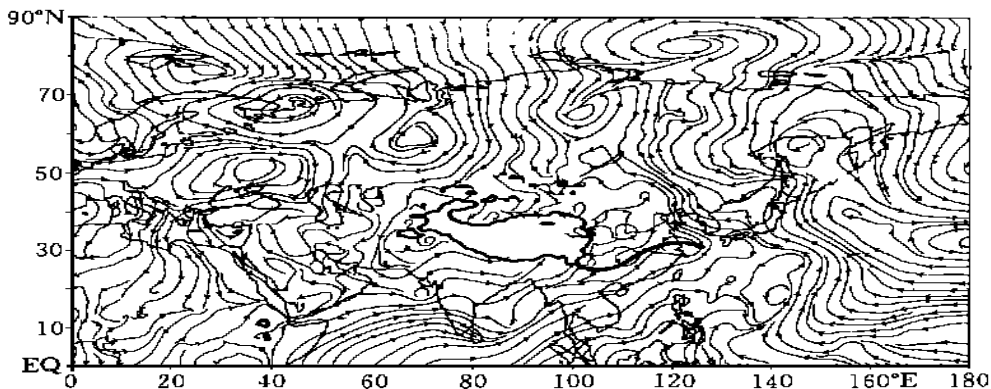


图5 1998年7月24日00UTC 850 hPa上流线
(粗实线是切变线, 空白处是青藏高原)

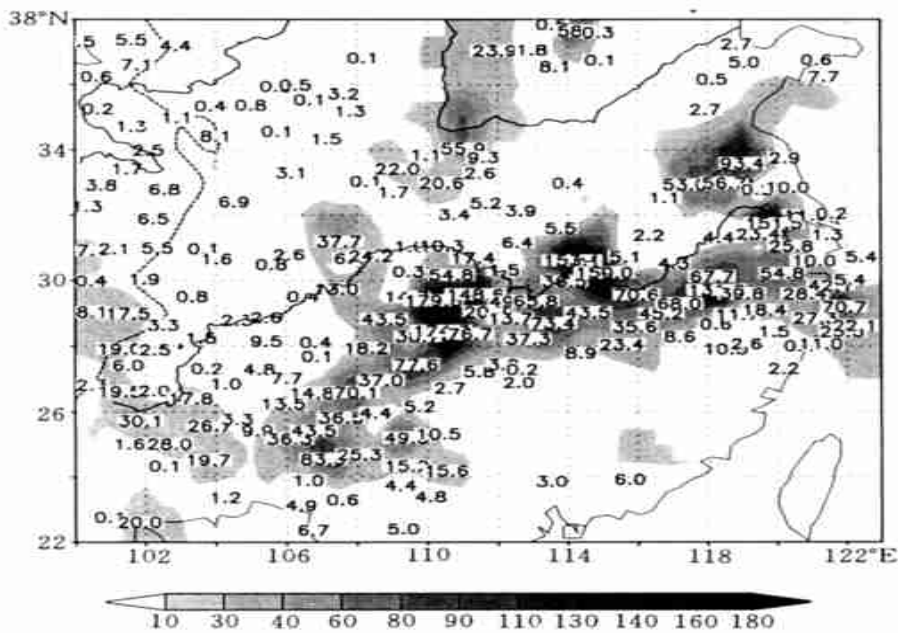


图6 1998年7月23日00UTC 降水实况
(图中数字: 24 h 降水量, 单位: mm)

依据本文上节中得出的切变线上涡层不稳定发展的必要条件, 针对以上个例做了各参数的具体计算及对比, 发现该切变线自7月22日00 UTC 之后则明显满足不稳定的必要条件, 可见在切变线上有中尺度系统发展是必然的。在具体计算过程中对密度梯度项做了如下的转换处理: 由状态方程 $p = \rho RT$, 而知 $\rho = \frac{p}{RT}$, 因为是在700 hPa 上, 所以 $p = 700$ hPa 是常数, 又因由700 hPa 上的温度场分布可算出绝对温度 T , 且 R 是常数, 因此很容易算出密度的值。

4 小 结

文中首先从理论上给出了水平切变线上涡层不稳定的必要条件, 并用一个例子来说明对不稳定必要条件的使用和计算, 以判断切变线上涡层不稳定的发展。在理论的证明过程中, 做到了尽量严谨, 一般不做简化, 较合理地求出了涡层不稳定的必要条件。尽管在推导过程中很少作出简化, 但是得到的结果是在切变线上的某些特殊点上求得的。从理论上来说, 切变线的某些点上出现不稳定, 也就是切变线发生不稳定, 从这个意义上讲, 这种证明和得到的不稳定必要条件就足够了。但是从应用的角度看, 仍存在着很大的不足, 因为必要条件是在某些特殊点上得到的, 在应用时必须对应那些特殊点来进行计算和分析, 可找出特殊点往往是有难度的, 需要有一定的天气学知识和预报的经验, 以便判断扰动波的波腹或波谷可能会发生的位置。

同时还需指出, 在本文研究不稳定的过程中避免使用标准模方法, 即对 ω 用波的形式表示, 并结合边界条件来求本征值的方法。因为涡度分布并不都具有波动类型, 所以用波动形式表示涡的分布往往是不合理的, 正是如此文中采用涡度的局地变化大于零的办法来探讨其不稳定发展机理, 以使结果更具有可靠性。

另一方面, 还必须指出水平切变线上的涡层不稳定只是切变线不稳定的一种形式, 除此形式外切变线还会有其它形式的不稳定, 如切变线上由于重力波的追赶而形成的不稳定, 也是切变线不稳定的一种形式, 文中并没有涉及。所以不能对所有的切变线的不稳定都用本文的理论去判断, 必须根据具体问题进行具体分析。

参考文献

- Helmholtz H. On discontinuous movements of fluids. *Phil Mag*, 1868, 36(4): 337 ~ 346
- Kelvin W. The influence of wind on waves in water supposed frictionless. *Phil Mag*, 1871, 42(4): 368 ~ 374
- Rayleigh, Lord. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. Lon. Math. Soc*, 1880, 11: 57 ~ 70
- Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for baroclinic circular vortex. *Geophys Publ*, 1950, 17: 1 ~ 52
- Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil Trans Roy Soc*, 1883, 174: 935 ~ 982
- Lin C. C. *The Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1955. 155pp
- Howard L. N. Note on a paper of John W. Miles. *J Fluid Mech*, 1961, 10: 509 ~ 512
- Kuo H. L. Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere. *J Meteor*, 1949, 6: 105 ~ 122
- Charney J. G. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J Meteor*, 1947, 4: 135 ~ 163
- Eady E. T. Long waves and cyclone waves. *Tellus*, 1949, 1: 33 ~ 52
- Stone P. H. On non-Geostrophic baroclinic stability. *J Atmos Sci*, 1966, 23: 390 ~ 400
- Arnold V. I. Condition for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid *Dokl. English Transl. Soviet Math.*, 1965, 6, 773 ~ 777
- Arnold V. I. On a priori estimate in the theory of hydrodynamic stability. *Amer. Math. Soc. Transl*, 1969, 19: 267 ~ 269
- 高守亭, 孙淑清. 应用理查逊数判别中尺度波动的不稳定. *大气科学*, 1986, 2: 171 ~ 182
- Zeng Q. C. Non-geostrophic instability. *Science in China(B)*, 1989, 29: 535 ~ 542
- 陆维松. 摩擦耗散大气中切变流的非线性稳定性. *中国科学(B)*, 1989, 8: 888 ~ 896

- 17 Gao Shouting, Tao Shiyan, Ding Yihui. The generalized E-P flux of wave-meanflow interactions. *Sciences in China (B)*, 1990, 33: 704 ~ 715
- 18 Mu M. Nonlinear stability criteria for motions of multi-layer quasi-geostrophic flow. *Science in China(B)*, 1991, 34, 1516 ~ 1528
- 19 陆维松. 动力稳定性原理. 北京: 气象出版社, 1992. 298pp
- 20 Scorer R S. *Synamics of Meteorology and Climate*. PRAXIS Publishing Ltd, 1997. 74 ~ 79
- 21 Gao Shouting. The instability of the vortex sheet along the shear line. *ADV ATM SCI*, 2000, 17: 525 ~ 537
- 22 董秉纲, 尹协远, 朱克勤. 涡运动理论. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1994, 76 ~ 79

THE INSTABILITY OF THE VORTEX SHEET ALONG THE HORIZONTAL SHEAR LINE

Gao Shouting Zhou Yushu

*(State Key Laboratory of Atmospheric Boundary Layer Physics and Atmospheric Chemistry Institute
of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)*

Abstract

The traditional Kelvin-Helmholtz notion of studying the shear instability is not suitable to the shear line with the strong horizontal wind shear. For this case, the shear line should be considered as the vortex sheet. Since then, the instability of this kind of the shear line becomes the instability of the vortex sheet rather than the traditional shear instability. If the velocity is induced by the vortex sheet, the inequalities, $(1 - R_v + R_{id}) > 0$ and $U(y, t) > U(A(t))$ become the criterion of the vortex sheet instability. This criterion indicates that the disposition of environment field restrains the disturbance developing along the shear line, there exist multi-scale interactions between this mesoscale disturbance and environment field. The calculation of the necessary condition for the instability is also presented in this paper.

Key words: Shear line, Induced velocity, Instability of the vortex sheet.

附录:

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \cdot v - \omega \cdot v + \frac{\rho \times \rho}{\rho^2} \rho \quad (1)$$

在方程(1)中 $\frac{1}{\rho} \rho$ 用动量方程所代替即

$$\frac{1}{\rho} \rho = \mathbf{g} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} - f \mathbf{k} \times \mathbf{v} \quad (2)$$

把式(2)代入式(1)则有

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \cdot v - \omega \cdot v + \frac{1}{\rho} \rho \times (\mathbf{g} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} - f \mathbf{k} \times \mathbf{v}) \quad (3)$$

因为在切变线附近风主要是沿切变线吹的,所以科氏力最主要表现在 $f(\bar{u} + u)\mathbf{j}$ 的分量,又因为密度梯度 $\mathbf{R} = \frac{1}{\rho} \rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \mathbf{j}$,因此 \mathbf{R} 同科氏力的 \mathbf{j} 方向上的分量又乘恰好为零,正是如此,方程(3)可以被写为

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \cdot v - \omega \cdot v + \frac{1}{\rho} \rho \times (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \quad (4)$$

这里 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, 则式(4)即是文中的方程组。