

海-气振荡子的动力行为与不稳态演化的研究^{* 1}

封国林 董文杰

(中国气象局气候研究开放实验室, 国家气候中心, 北京, 100081)

摘 要

从数学上严格证明了非线性随机海-气振荡子模型存在一个稳定的极限环; 随后转换成 Fokker-Planck 方程 (FPE), 从非平衡系统动力学角度首次研究 ENSO 从不稳态向稳态演化的问题。研究表明: (1) 当初始处于不稳态的状态向稳态演化时, 在最不稳定流型的决定下, 系统只向一对对称的稳态演化, 一稳态释为准正常的气候状态; 另一稳态释为异常气候状态, 即强 ENSO 状态; (2) 若初始条件分布不在原点, 由确定性方程可知, 系统将向反对称的稳态演化, 但在随机力的作用下, 产生了与确定系统有本质区别的结果, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, 绝大部分概率仍然对半地分布在对称势阱内, 而反对称势阱内几乎不存在概率分布, 计算结果与观测事实相吻合; (3) 从动力学宏观理论上来看, 准气候正常态与强 ENSO 是两个平衡态, 遵循统一的动力学理论框架, 它们有相同的时空尺度; ENSO 是南方涛动和 El Niño 循环的统称, 将它们纳入统一的框架体系来研究, 说明它们的合理性; 但从微观理论上, 南方涛动、El Niño 和 La Niña 三者又反映出气候不同的位相, 如何反映出 El Niño 和 La Niña 位相转换等, 应建立它们本身的动力学框架。

关键词: ENSO, Fokker-Planck 方程, 极限环, 海-气振荡子。

1 引 言

南方涛动和 El Niño/La Niña 分别是发生在热带大气和海洋中的异常事件, 半个多世纪以来, 人们相继对其物理机制进行研究, 1966 年 Bjerknes 指出大气 Walker 环流与 SST 在赤道太平洋两者之间的紧密联系, 是热带大气和海洋运动相互作用的表现^[1]。因此, 将南方涛动与 El Niño 循环描述成一个统一的气候现象, 简称为 ENSO。另一方面, El Niño 和 La Niña 也是互补的, 由暖的位相 El Niño 和冷的 La Niña 位相构成一个过程循环。

自 Bjerknes 提出 ENSO 的概念以来, 人们对发生在热带太平洋的海气系统中这一强讯号进行广泛研究。一方面 ENSO 不但影响区域和全球气候, 而且以其对全球广大地区带来的严重旱涝等灾害而受到全世界人们的关注和广泛的重视^[2,3], 已有研究表明 El Niño 和 La Niña 对全球气候异常起着十分重要的作用。同样 ENSO 对中国气候, 尤其是东亚季风, 有着重要的影响, 中国东北地区夏季低温冷

害, 长江中下游地区梅雨期的旱涝等, 这说明了中国及全球气候变化中包含着显著的 ENSO 信号^[4~7]。因此揭示 ENSO 的可能的循环和激发机制, 对了解和预报 ENSO 将有重要的意义。

由于海-气相互作用的复杂性和非线性对从理论上用简单的模式来解释其机制, 造成了很大的困难。结果, 数值模式与模拟成为揭示 ENSO 时空结构的主要方法和手段。20 世纪 70 年代, 国际上提出了 ENSO 发生的信风张弛理论, 80 年代又提出了 El Niño 的海气耦合波不稳定理论^[8], 90 年代, Graham 和 White 提出了 ENSO 循环是由热带太平洋 3 个变量: 海表温度、海平面风和上层海洋厚度之间同时的、时滞的、局地的和远程的相互作用而形成的自然振荡子现象^[9,10]。尤其 20 世纪末, 从海-气相互作用的动力学来研究 ENSO 事件现已成为热门课题之一。巢纪平则从大气和海洋的热力和动力过程, 以及海洋和大气的耦合波等角度去研究 ENSO 事件^[11]。McCreary 和 Anderson, Neelin 等还用简单概念模式、中等简化模式和耦合 GCM 的混合模

* 初稿时间: 2004 年 12 月 20 日; 修改稿时间: 2005 年 2 月 15 日。

资助课题: 国家自然科学基金(40275031, 40231006) 和国家重点发展基础研究项目(2006CB400503)

式去研究 ENSO,其中以诊断分析和数值模拟去了解 ENSO 机制的居多,数值模式能包容众多的物理过程,以描述全球性的热带海气现象^[12,13]。但这类数值模拟方法一般难以得到反映清晰物理过程的解。因此,把两个介质中的物理过程尽可能地简化,得到易反映运动本质的模式方程,并求得它的解,仍然是十分重要的,它能成功模拟出 ENSO 的许多重要现象,了解这些现象的物理机制,且能运用非线性科学的最新成果来了解 ENSO 的演变过程,而这些用复杂的全球海气耦合模式未必能做到。

ENSO 循环具有周期性、尺度选择特性和异常的物理结构,因此只有从非线性动力气候学来研究才有可能获得进一步了解。用复杂的海气耦合模式,能模拟出 ENSO 的生命史和非周期性的年际变率,这无疑是对认识 ENSO 现象的重大进步。然而从深入了解 ENSO 的动力-热力机制来看,显然一些物理过程有待澄清和深入研究。在诸多欲探索的问题中,有若干关键问题亟待探索。例如,ENSO 生命史是如何完成的,一个暖的厄尔尼诺状态如何转换到一个冷的拉尼娜状态;非周期的 ENSO 循环是如何产生的。这些问题的解决有待于将非线性科学的新成果在 ENSO 研究中进行应用。

1988 年 Graham 和 White,及 1995 年 Mantua 和 Battisi 他们认为 ENSO 的非周期性也许是高频率随机力或 ENSO 系统的内在的非线性。中尺度耦合数值模式试验表明 ENSO 的非周期性本质上是被年际循环所驱动的低维混沌的演化行为^[14]。1999 年, Wang^[15,16]在此基础上,通过物理简化和繁杂的数学推导建立了描述 ENSO 事件的海-气振荡子的随机动力学模式,必含有唯一的一个极限环解,这一极限环是一个稳定的吸引子,它代表了一个内在的耦合系统的年际振荡子。

本文采用 Wang 等非线性随机海-气振荡子模型,从数学上严格证明存在一个稳定的极限环;随后运用 Fokker-Planck 方程(FPE),从非平衡系统动力学角度首次研究 ENSO 从不稳态向稳态演化的问题,揭示了复杂的非线性海-气振荡子模型尽管存在多个平衡态,而在实际气候系统中只存在准正常态和强 ENSO 循环稳定态,给出了两稳态之间的首通时间;计算结果与观测事实相吻合。

2 ENSO 事件随机动力模型

描述海表温度距平 $SST(T)$ 和温跃层厚度 (h)

的 ENSO 事件随机动力方程为^[16]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_1 T + a_2 h + a_3 T^2 - a_3 \mu' T h - 2T^3 + \Gamma(t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 2bh - bT - 2h^3 + \Gamma(t)$$

其中 a_1, a_2, a_3, μ', b 各参数见文献^[16], $\Gamma(t)$ 为 ENSO 事件系统内部或系统外部的随机噪声。对其确定性方程重新标度,令 $x = \sqrt{2} T - \frac{a_3}{3\sqrt{2}}, y = \sqrt{2} h$, 代入

式(1),得

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x - x^3 - \epsilon_1(x - y) + \mu xy + \Gamma(t) \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha_2 y - y^3 - \epsilon_2(y - x) + \Gamma(t)$$

其中

$$\alpha_1 = a_1 + a_2 + a_3^2(1 - \mu')/6 \quad \epsilon_1 = a_2 - a_3^2 \mu'/6$$

$$\mu = -\frac{\sqrt{2}}{2} a_3 \mu' \quad \alpha_2 = b \quad \epsilon_2 = -b$$

适当调整参量使 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ 则式(2)变为

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - x^3 - \epsilon(x - y) + \mu xy + \Gamma(t) \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - y^3 - \epsilon(y - x) + \Gamma(t)$$

一般假设 $\Gamma(t)$ 为白噪声,且 $\langle \Gamma(t) \rangle = 0, \langle \Gamma(t') \Gamma(t) \rangle = 2D(t - t'), D$ 为噪声强度。与化学中薛洛格(Schlogl)化学反应模型进行类比可发现,式中 ϵ 为海表温度距平 $SST(T)$ 和温跃层 (h) 之间的扩散系数, μxy 为一交叉项,且 μ 为一小量, $\epsilon > 0$ 。式(3)是一个随机非线性方程组,它描述着海表温度距平 $SST(T)$ 和温跃层 (h) 之间复杂的非线性效应。

3 海-气动力系统的稳态解

无论对微分方程组还是随机动力方程组,首先需要求出稳态解,其原因是求解一个复杂的非线性方程组的解析解是很困难的。因此只有先求出稳态解,然后通过稳定性分析或线性化,再进一步了解稳态附近或邻域内的演化。

略去交叉项,描述 ENSO 事件的确定性方程为

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - x^3 - \epsilon(x - y) \quad (4a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - y^3 - \epsilon(y - x) \quad (4b)$$

此即化学中的薛洛格双匣模型。在动力气候学的箱匣模型中,将大气、海洋视为箱匣,建立辐射-对流模型。从式(4)来看,不但说明了箱匣模型的合理性,

也证明了不同学科中某些概念理论的通用性。

3.1 一个稳定的极限环

首先证明式(4)存在一个稳定的极限环,它描述 ENSO 事件的准正常稳定态,必须含有唯一的一个极限环解,这一极限环是一个稳定的吸引子,它代表了一个内在的耦合系统的年际振荡。经复杂的计算,式(4)可改写成单变量高阶方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = B_1(y) \left(\frac{dy}{dt}\right)^3 + B_2(y) \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + B_3(y) \left(\frac{dy}{dt}\right) + B_4(y) \quad (5)$$

其中

$$B_1(y) = -\frac{1}{\epsilon^3}$$

$$B_2(y) = \frac{3}{\epsilon^3}(Ay - y^3)$$

$$B_3(y) = 2A - 3\left(1 + \frac{1}{\epsilon}A^2\right)y^2 + \frac{6A}{\epsilon^3}y^4 - \frac{3}{\epsilon^3}y^6$$

$$B_4(y) = \frac{1}{\epsilon^3}y^9 + \frac{3A}{\epsilon^3}y^7 - \frac{3A^2}{\epsilon^3}y^5 + \left(\frac{A^2}{\epsilon^3} + A\right)y^3 + (\epsilon - A^2)y$$

$$A = \alpha - \epsilon$$

设 $\frac{dy}{dt} = z$, 则

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= B_1(y)z^3 + B_2(y)z^2 + B_3(y)z + B_4(y) \end{aligned} \quad (6)$$

一般地对极限环而言,系统在极限环轨道上的总能量变化率该为 0, 设系统的总能量为 E

$$E = \text{动能} + \text{势能} = \frac{1}{2}(\dot{y})^2 + \frac{1}{2}2y^2 \quad (7)$$

所以 $\int_t^{t+T} \frac{dE}{dt} dt = 0$, 即

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \frac{d\left[\frac{1}{2}(\dot{y})^2 + \frac{1}{2}y^2\right]}{dt} dt &= \\ \int_t^{t+T} (\dot{y}\dot{y} + y\dot{y}) dt &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

由式(6)知

$$\int_t^{t+T} \{B_1(y)\dot{y}^4 + B_2(y)\dot{y}^3 + B_3(y)\dot{y}^2 + [y + B_4(y)]\dot{y}\} dt = 0 \quad (9)$$

设极限环的平均半径为 \bar{r} , 则设系统所存在的周期解为

$$y = \bar{r}\cos t, \quad \dot{y} = -\bar{r}\sin t \quad (10)$$

并令 $t=0, t=2\pi$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} B_1(y)\dot{y}^4 dt &= -\frac{1}{\epsilon^3}\bar{r}^4 \left(-\frac{1}{4}\sin^3 t \cos t\right) \Big|_0^{2\pi} - \\ &= \frac{3}{4\epsilon^3}\bar{r}^4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\frac{3}{4\epsilon^3}\bar{r}^4 \cdot \\ &\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{3}{4\epsilon^3}\bar{r}^4 \pi \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} y^n \dot{y}^3 dt &= -\int_0^{2\pi} \bar{r}^{n+3} \cos^n t + \sin^3 t dt = \\ &= \bar{r}^{n+3} \int_0^{2\pi} \cos^n t + (1 - \cos^2 t) d(\cos) t = 0 \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{2\pi} B_2(y)\dot{y}^3 dt = 0 \quad (12)$$

$$\text{同理, } \int_0^{2\pi} y^n \dot{y} dt = 0, \int_0^{2\pi} B_4(y)\dot{y} dt = 0 \quad (13)$$

此外,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} y^2 dt &= \bar{r}\pi & \int_0^{2\pi} y^2 \dot{y}^2 dt &= \frac{1}{4}\bar{r}^4 \pi \\ \int_0^{2\pi} y^4 \dot{y}^2 dt &= \frac{1}{8}\bar{r}^6 \pi & \int_0^{2\pi} y^6 \dot{y}^2 dt &= \frac{5}{64}\bar{r}^8 \pi \\ \int_0^{2\pi} y^{2n+1} \dot{y}^2 dt &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

将式(11)~(14)代入式(9)得

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \{B_1(y)\dot{y}^4 + B_2(y)\dot{y}^3 + B_3(y)\dot{y}^2 + \\ [y + B_4(y)]\dot{y}\} dt = \\ \bar{r}^2 \pi \left[-\frac{15}{64\epsilon^3}\bar{r}^6 + \frac{3A}{4\epsilon^3}\bar{r}^4 - \frac{3}{4}\bar{r}^2 - \right. \\ \left. \frac{3A^2}{4\epsilon^3}\bar{r}^2 - \frac{3}{4\epsilon^3}\bar{r}^2 + 2A\right] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

令 $\bar{r}^2 = f$,

$$\begin{aligned} -\frac{15}{64\epsilon^3}f\pi \left[f^3 - \frac{16}{5}Af^2 + \frac{16}{5}(\epsilon^3 + \right. \\ \left. A^2 + 1)f - \frac{128}{15}A\epsilon^3\right] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

设 $f' = f + \frac{16A}{15}$, 则式(16)后一因子变为

$$f'^3 + pf + q = 0 \quad (17)$$

其中 p, q 可以用 A, ϵ 来表示。式(17)的 3 个根可表示为

$$\begin{aligned} f_1' &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ f_2' &= \omega_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ f_3' &= \omega_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $\omega_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\omega_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 。经计算, $3\epsilon > 1$, 时, f_1' 为一个正实根, $\bar{r}^2 = B$, ($B = -\frac{16A}{15} + f_1'$)。且 $\bar{r}^2 < B$ 时, $\int_t^{t+T} \frac{dE}{dt} > 0$; 而当 $\bar{r}^2 > B$ 时, $\int_t^{t+T} \frac{dE}{dt} < 0$, 这充分表明了随着时间的增长极限环内的运动将由于能量增加而逼近极限环, 同时极限环外将由于能量的减少而逼近极限环, 从而证明 ENSO 事件动力学系统中存在一个稳定的极限环。说明大气、海洋环流中的其它因素激发了 ENSO, 但基于能量守恒, 能量只是在全球范围内的重新调整和分配, El Niño 或 La Nina 的反位相可能也是遵循能量守恒定律的结果。事实上, 由于海洋和大气在动力学和热力学方面均在相互调整着, 因此, 一旦异常条件强到能破坏大气和海洋之间的平衡状态, 则可以在新的条件下进行相互适应和调整使异常的过程持续发展, 而发展成为 El Niño 或 La Nina 型的准平衡状态。

3.2 稳态解

$$\text{令 } \frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\alpha x - x^3 - \epsilon(x - y) = 0 \quad (19a)$$

$$\alpha y - y^3 - \epsilon(y - x) = 0 \quad (19b)$$

当 $\alpha < 0$, 方程(19)只有一个稳态解, $x_0 = 0, y_0 = 0$ 可以释为准正常的海气相互作用的稳态。若海气相互作用都维持在 $\alpha < 0$ 条件下, 气候预报与观测将会大大的简化。事实上, 在外界噪声的影响下以及海-气耦合系统的内在随机涨落, 可使得 $\alpha > 0$, 这样就会产生复杂和难以预测的异常气候。

当 $\alpha > 0$, 且 $\alpha > 3\epsilon$ 时, $x_0 = 0, y_0 = 0$ 变为一个不稳定的鞍点, 且有一对对称稳定的结点 ($x_1 = y_1 = \sqrt{\alpha}, x_2 = y_2 = -\sqrt{\alpha}$) 和一对反对称的稳定结点 ($x_3 = y_3 = \sqrt{\alpha - 2\epsilon}, x_4 = y_4 = -\sqrt{\alpha - 2\epsilon}$), 另外还有 4 个周期解。 $\alpha = 0$ 是一个分岔点。

给定一个确定性的动力学系统, 如式(19), 存在两类定态解, 一类是稳定态, 另一类是不稳定态。这两类稳定态具有完全不同的渐近行为。当系统处于稳定态附近时, 它将随时间趋于这一稳定态; 而当它处于不稳定态附近时, 系统将会远离这一稳定态而去。这样不稳定态似乎在现实中是不存在的, 从而研究状态演化没有多大的现实意义。但实际情况并

非如此, 在非线性系统中, 不稳定态的演化出现在许多具有实际意义的过程中, 研究这些演化的特点及随机力在演化中所起的作用, 是非线性系统随机理论的重要内容。

4 海-气耦合振荡子不稳态的演化

4.1 ENSO 事件的 Fokker-Planck 方程

如果改变参数使 $\alpha < 0$ 突然变成 $\alpha > 0$, 系统值 (x, y) 仍停留在 $x_0 = 0, y_0 = 0$ 原稳定解(现为不稳定)附近, 所以要知道系统在突然改变参数以后的命运, 我们就必须研究不稳定态的演化(图 1)。

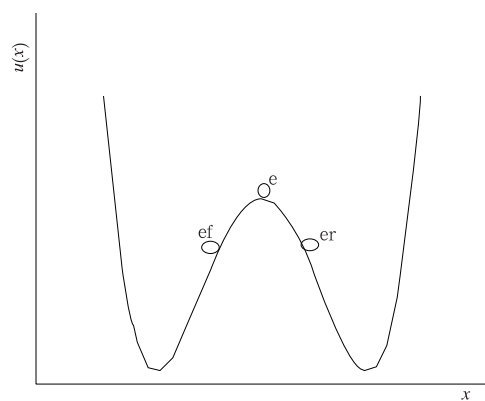


图 1 不稳定态演化性质

Fig. 1 The evolution property of unstable state

描述海温距平 T 和温跃层厚度 h 的海气振荡子的式(3)可变换成 FPE^[17]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [c_1(x, y)] \rho(x, y, t) - \\ & \frac{\partial}{\partial y} [c_2(x, y)] \rho(x, y, t) + \\ & D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \rho(x, y, t) \quad (20) \end{aligned}$$

其中 $c_1(x, y) = \alpha x - x^3 - \epsilon(x - y)$, $c_2(x, y) = \alpha y - y^3 - \epsilon(y - x)$, D 为噪声强度。这样变量 T, h 就转化成由概率密度来 $\rho(x, y, t)$ 来描述, 而它们的测量值由统计平均值给出, 即

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= \int x \rho(x, y, t) dx dy \\ \langle y(t) \rangle &= \int y \rho(x, y, t) dx dy \quad (21) \end{aligned}$$

则式(20)的定态解可写成

$$\rho(x, y) = N \exp\left(-\frac{\phi(x, y)}{D}\right) \quad (22)$$

其中, 广义势函数

$$\phi(x, y) = -\left[\frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{\alpha}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4 - 2\epsilon(x-y)^2\right]$$

N 为常数, 有归一化条件确定, $N = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\phi(x, y)}{D}\right) dx dy\right]^{-1}$ 。对于不同 α, ϵ , 广义势函数的形状大不相同, 当然也就有不同的性质, 图(2a)显然在

$\alpha < 0$ 时, 只有一个稳态。而在 $\alpha > 0$ 时, 在 ϵ 取不同值时, 广义势函数呈现出复杂的形状图(2b, c)。本研究仅取 $\alpha > 3\epsilon$ 时的势函数, 势有 4 个极小值(x_i, y_i)($i=1, 2, 3, 4$), 一个极大值(0, 0)和 4 个鞍点, 其中势函数的 4 个极小值对应于确定性方程(19)的 4 组定态解。为了描述 ENSO 系统的不稳态的演化问题, 采用二维的格林函数 Ω 展开(Ω FPE)。

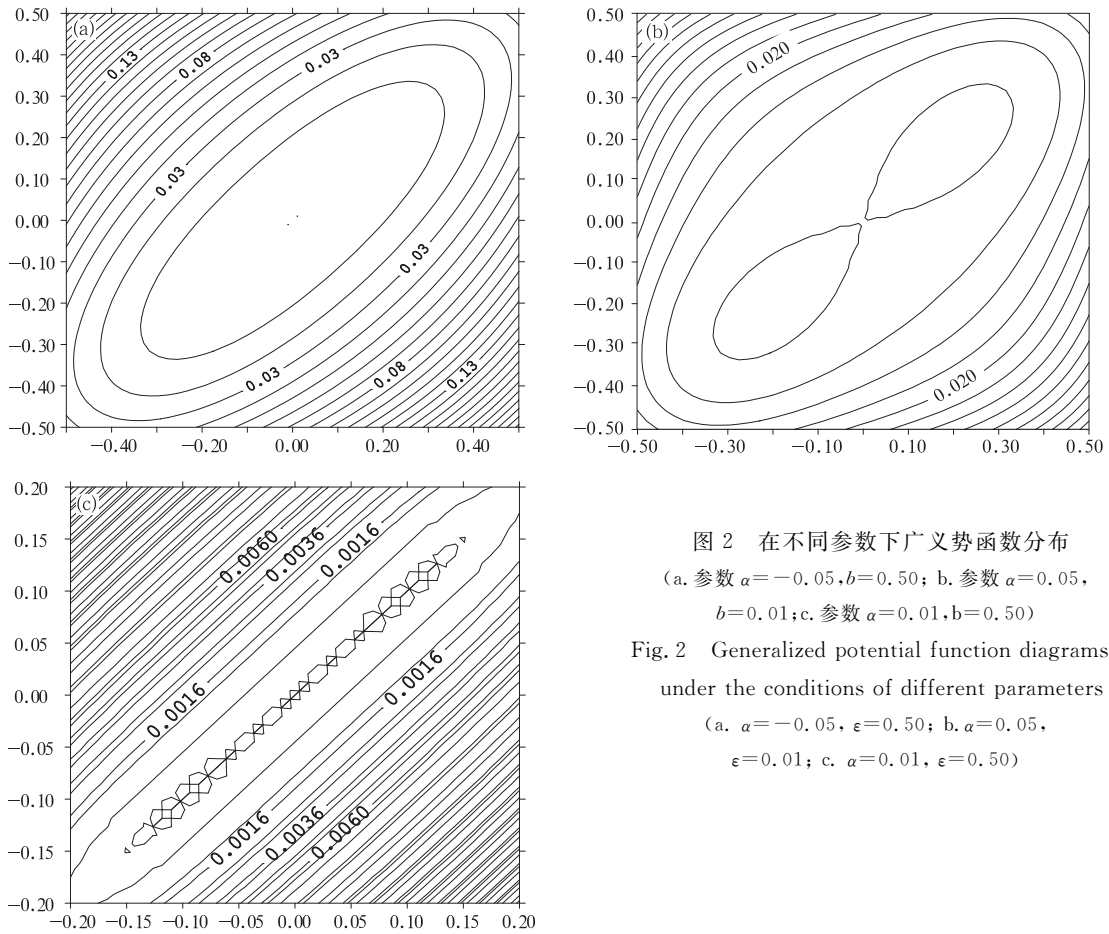


图 2 在不同参数下广义势函数分布
(a. 参数 $\alpha = -0.05, b = 0.50$; b. 参数 $\alpha = 0.05, b = 0.01$; c. 参数 $\alpha = 0.01, b = 0.50$)
Fig. 2 Generalized potential function diagrams under the conditions of different parameters
(a. $\alpha = -0.05, \epsilon = 0.50$; b. $\alpha = 0.05, \epsilon = 0.01$; c. $\alpha = 0.01, \epsilon = 0.50$)

从不稳态到准稳态的驰豫过程, 设初始分布为

$$\rho(x, y, 0) = \delta(x - \gamma\sqrt{D})\delta(y - \beta\sqrt{D}) \quad \gamma, \beta = 0 \quad (23)$$

在(0, 0)附近线性化的式(20)FPE 的解 $\rho_{in}(u, v, t)$ 为^[18]

$$\rho_{in}(u, v, t) = \frac{1}{\pi D} \sqrt{\frac{\alpha(\alpha - 2\epsilon)}{(1 - e^{2\alpha t})(1 - e^{2(\alpha - 2\epsilon)t})}} \cdot \exp\left[\frac{\alpha}{D} \frac{(u - u_0 e^{2\alpha t})^2}{1 - e^{2\alpha t}} + \frac{\alpha - 2\epsilon}{D} \frac{(v - v_0 e^{(\alpha - 2\epsilon)t})^2}{1 - e^{2(\alpha - 2\epsilon)t}}\right] \quad (24)$$

其中 $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), v = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$,

$$u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\gamma + \beta)\sqrt{D}, v_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\gamma - \beta)\sqrt{D}$$

只要 $e^{2\alpha t} \ll D^{-1}$, 式(24)是对式(20)时间演化过程的很好的描述; 而当 $e^{2\alpha t} \gg 1$ 时, 绝大部分概率已溢出不稳定区 $|x|, |y| \leq \sqrt{D}$, 由于 $D \ll 1$, 可以找到 t_s , 满足

$$\frac{1}{D} \gg e^{2\alpha t_s} \gg 1 \quad (25)$$

此时, 漂移力线性近似解式(20)依然成立, 而 Ω FPE 仍然适用。

对于一个 t_s 时刻处于 $\rho(x_s, y_s, t_s) = \delta(x - x_s) \cdot \delta(y - y_s)$ 的 Delta 分布, Ω 展开的近似解为

$$\rho_{\Omega}(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D(\det \sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{D}(H' - H_0'(t)) \sigma^{-1}(H - H_0(t))\right] \quad (26)$$

其中 H 和 $H_0(t)$ 为二维矢量, $H = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $H_0(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, H' , $H_0'(t)$ 分别为它们的转置。 σ 为 2×2 矩阵 $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \sigma_{xy}(t) \\ \sigma_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) \end{bmatrix}$, $x(t)$ 和 $y(t)$ 由确定性方程(4)决定, 其初始条件为 $x(t_s) = x_s$, $y(t_s) = y_s$ 。矩阵 σ 的各元素由下列方程组给出

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{xx} &= 2[(\alpha - 3) - 3x(t)^2]\sigma_{xx} + 2 + \varepsilon\sigma_{xy} \\ \dot{\sigma}_{xy} &= \varepsilon(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \{[(\alpha - 3) - 3x(t)^2] + [(\alpha - 3) - 3y(t)^2]\}\sigma_{xy} \\ \dot{\sigma}_{yy} &= 2[(\alpha - 3) - 3y(t)^2]\sigma_{yy} + 2 + \varepsilon\sigma_{xy} \end{aligned} \quad (27)$$

其初始条件为 $\sigma_{xx}(t_s) = \sigma_{xy}(t_s) = \sigma_{yy}(t_s) = 0$ 。在 t_s 时刻将式(24)和(26)对接, 给出了系统式(3)从不稳定态向亚稳定态演化的整个过程概率

$$\rho(x, y, t) = \int p_{in}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), t_s\right) \rho_{\Omega}(x, y, t) dx_s dy_s \quad (28)$$

这样求解二维二阶偏微分方程(2)的问题转化成求双变量的常微分方程。

4.2 ENSO 事件二维约化的讨论

式(24)在 $\frac{1}{D} \gg e^{2\alpha t} \gg 1$ 时

$$\frac{e^{2\alpha t}}{e^{2(\alpha-2\varepsilon)t}} = e^{4\varepsilon t} \gg 1 \quad (29)$$

所以早在线性区, 式(24)的概率分布在最不稳定型 u 方向的扩散已经远远大于概率在次不稳定流型 v 方向上的扩散。前者扩散的速度是 $e^{\alpha t}$, 后者为 $e^{(\alpha-2\varepsilon)t}$ 。概率分布在 v 方向上有一定厚度而沿 u 方向延展有一定的长度。 t 越大, 这个细条的长与宽之比越大, 当 $t \gg 1$ 时, 概率可以认为是沿 u 方向扩展, 集中在 $v=0$ 附近的一条一维分布, 当线性区解与 Ω 展开解在 t_s 时刻对接时, 后一时区解所对应的 t_s 时刻的初始分布已经在 u_s 方向上相当扩展而在 v_s 方向仍近似为 Delta 分布的初始条件。所以确定性方程可解化为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \alpha x - x^3 \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (30)$$

σ 的矩阵元解化为

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{xx} &= 2[(\alpha - 3) - 3x(t)^2]\sigma_{xx} + 2 + \varepsilon\sigma_{xy} \\ \dot{\sigma}_{yy} &= \sigma_{xx} \\ \dot{\sigma}_{xy} &= 2\varepsilon\sigma_{xx} + 2[(\alpha - 3) - 3x(t)^2]\sigma_{xy} \end{aligned}$$

其解可以立即给出

$$\begin{aligned} \int_{x_s}^{x(t)} \frac{dx}{\alpha x - x^3} &= t - t_s \quad y(t) = x(t) \\ \sigma_{xx} + \sigma_{xy} &= (\alpha x - x^3)^2 \int_{x_s}^x \frac{2dx}{(\alpha x - x^3)^2} \\ \sigma_{xx} - \sigma_{xy} &= [(\alpha - 2\varepsilon)x - x^3]^2 \int_{x_s}^x \frac{2dx}{[(\alpha - 2\varepsilon)x - x^3]^2} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\alpha_{xx} = \alpha_{yy}$$

用 $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$, $v = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$ 的线性变换, 可将矩阵 σ 写成对角形式

$$\begin{aligned} \sigma_{uu} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{xy}) = Z_1^2 \int_{x_s}^x \frac{2dx}{Z_1^3} \\ \sigma_{vv} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{xy}) = Z_2^2 \int_{x_s}^x \frac{2dx}{Z_2^3} \end{aligned} \quad (32)$$

$$Z_1 = \alpha x - x^3, Z_2 = (\alpha - 2\varepsilon)x - x^3$$

这样, 系统从不稳定态向亚稳定态演化的概率为

$$\begin{aligned} \rho(u, v, t) &= \frac{1}{4\pi^2 D^2} \frac{\sqrt{\alpha(\alpha - \varepsilon)}}{e^{2(\alpha - \varepsilon)t_s} \sqrt{\sigma_{uu}\sigma_{vv}}} \int du_s dv_s \cdot \\ &\exp\left\{-\frac{1}{2D} \left[\frac{\alpha(u_s - u_0 e^{\alpha t})^2}{e^{2\alpha t_s}} + \frac{(\alpha - 2\varepsilon)(v_s - v_0 e^{(\alpha - 2\varepsilon)t})^2}{e^{2(\alpha - 2\varepsilon)t_s}} + \frac{(u - u(t))^2}{\sigma_{uu}} + \frac{v^2}{\sigma_{vv}} \right]\right\} \end{aligned} \quad (33)$$

式(33)对 v_s 是高斯型分布。我们曾运用量子力学方法, 精确地求出了海-气耦合模式的依时解, 对依时解的分析表明: 当气候系统的行为呈现为布朗运动形式, 由此从理论上证明了 Hasselmann 关于随机气候模式建立的立足点, 即视气候变化为轻重质点碰撞的布朗运动^[19], 因此这样结论是合理的。

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 = \sqrt{\alpha} \\ x_2 &= y_2 = -\sqrt{\alpha} \\ x_3 &= y_3 = \sqrt{\alpha - 2\varepsilon} \\ x_4 &= y_4 = -\sqrt{\alpha - 2\varepsilon} \end{aligned} \quad (34)$$

从不同稳定态出发的系统, 到底最终发展到 4 个定态中的哪些态上去? 事实上, 要回答这一个问题甚至不必真正求解积分式(28), 因为这一问题早在初始时区已在不稳定点附近的模态竞争中确定。式

(24)中有 u, v 两个模,其中最不稳定的模 u 起了决定性的作用。它在不稳定点附近的竞争中取得了优势,从而支配了系统,使二模问题实际上变成了以这一最不稳定模为中心的一维问题,特别是随机因素的加入,使 FPE 的性质十分不同于相应的确定性方程。当 $\gamma = \beta = 0$ 时,确定性方程不能决定系统向哪个稳定态发展,而解(28)的结论十分确定。当 $t \rightarrow \infty$ 时,所有 $u_s > 0$ 的概率向 $x_1 = y_1 = \sqrt{\alpha}$ 的势井运动(图 2b 的右测),而 $u_s < 0$ 的概率则向 $x_2 = y_2 = -\sqrt{\alpha}$ 的势井发展(图 2b 的左测),最后的亚稳态分布为

$$\rho(u, v, t) = \frac{1}{2\pi D} \frac{(2\alpha - \epsilon)^2}{\sqrt{\alpha(\alpha - \epsilon)}} e^{-\frac{\sqrt{2}(2\alpha - \epsilon)^2}{2D}} \left[e^{\frac{\sqrt{2}(2\alpha - \epsilon)^2}{2D\alpha}(u - \sqrt{\alpha})^2} + e^{\frac{\sqrt{2}(2\alpha - \epsilon)^2}{2D\alpha}(u + \sqrt{\alpha})^2} \right] \quad (35)$$

即绝大部分概率对半地集中在对称解 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 两个势井内。而另外反对称解 (x_3, y_3) 和 (x_4, y_4) 的势井则几乎不存在概率分布。尤其有趣的是,当初始 Delta 分布不在原点上,而在 $x_0 + y_0 = u_0\sqrt{D} = 0, x_0 - y_0 = v_0\sqrt{D} \neq 0$ (例如 $v_0 > 0$) 处,由确定性方程知,系统最后必然发展到 (x_3, y_3) 去;然而,在随机力作用下,当 $t \rightarrow \infty$ 时,绝大部分概率仍然对半地分布在头两个对称势内,而 (x_3, y_3) 和 (x_4, y_4) 的势井则几乎不存在概率分布。

这个思想十分类似于协同理论中的支配原则,所不同的是协同论强调不稳定理论的慢模支配系统的所有稳定和次不稳定模,从而决定系统的命运,产生协作效应。另外,用 Ω FPE 理论处理不稳定态到亚稳定态的全过程,允许控制参数远远高于阈值,而协同论的支配原则集中于讨论接近阈值附近的较小参数变化。

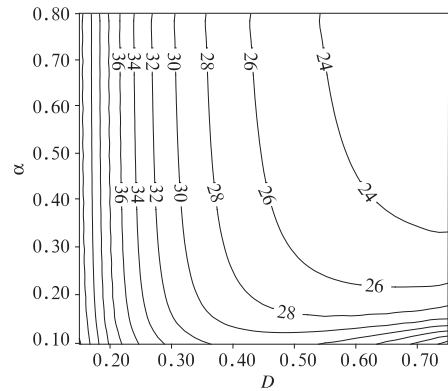
一般地,随着 $t \rightarrow \infty$,初始处于不稳定的系统所实现的终态只能是最不稳定流型所指时间的稳定态,从最不稳定态向稳定态的演化过程中,反对称的稳定态在实际过程中观察不到,就好像系统只存在两个稳定态一样,几率几乎各占一半。

事实上,对称的两个稳定态之间也有跃迁,即概率之间的交换,这里仅仅给出系统处于对称的两个稳定态的寿命计算公式,即首通时间为:

$$T_1 = \left[\frac{1}{2\pi} \sqrt{\phi''(x_1)\phi''(x_0)} \exp\left(\frac{\phi(x_1)}{D} - \frac{\phi(x_0)}{D}\right) \right]^{-1}$$

$$T_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \sqrt{\phi''(x_2)\phi''(x_0)} \exp\left(\frac{\phi(x_2)}{D} - \frac{\phi(x_0)}{D}\right) \right]^{-1} \quad (36)$$

显然在等势的情况下即 $\phi(x_1) = \phi(x_2)$,则系统处于对称的两个稳定态的寿命是相等的。图 3 给出了在不同 α, D 下的处于稳定态的时间。在弱噪声强度下,很好地呈现出 ENSO 的生命史约为 $\eta = 30 \sim 40$ 个月。而不稳定态向两个稳定态演化的概率几乎各占一半,由此在一段时间序列 T ,共发生 ENSO 事件循环的时间为 $T_{2理论} = \frac{1}{2} T$,发生的概率 $\rho_{理论} = 50\%$ 。



3 不同参数 α, D 下 ENSO 事件首通时间
Fig. 3 The first passage time for ENSO events under different α and D conditions

5 结论与讨论

金祖辉和陶诗言利用美国国家大气科学研究中心(NCAR)1961~1997 年月平均海表温度资料,选 3 区域($150^\circ \sim 80^\circ W, 5^\circ S \sim 5^\circ N$)平均代表赤道东太平洋海温变化的信号。规定 Nino 3 区域平均海温振幅小于或等于 0.8 个标准差($\pm 0.63^\circ C$)为 ENSO 循环过程的准正常年位相,我们释为稳定态 (x_1, y_1) ,按此规定确定的准正常年态有 1977, 1979, 1980, 1981, 1984, 1990 和 1994 年 7 次。反之,释为 (x_2, y_2) ,为异常气候年,即强 ENSO 信号对大气环流的影响大,引起的气候异常 El Niño 事件(ENSO 循环的发展位相)和 La Nina 事件(ENSO 循环的反位相)如表 1 和表 2 所示^[5],在表中我们补上 1997 年 ENSO 事件,即时间序列延至 1961~1999 年, $T = 39 \times 12 = 468$ (月)。

从表 1 和表 2 可知,共发生了 8 次 ENSO 事件所占时间 $T_{2实际} = 225$ 个月(含 ENSO 循环发展位相和 ENSO 循环反位相所占时间)

$$\frac{T_{2\text{实际}}}{T} = \frac{225}{39 \times 12} \approx 48.1\% \quad = \frac{39 \times 12}{8 + 7} = 31.2(\text{月}) \quad (37)$$

$$\rho_{\text{ENSO实际}} = \frac{\text{ENSO 发生的次数}}{\text{ENSO 发生的次数} + \text{准正常年次数}} = \frac{8}{8 + 7} \approx 53.3\%$$

$$\eta_{\text{实际}} = \frac{\text{总序列时间长度}}{\text{ENSO 发生的次数} + \text{准正常年次数}}$$

这与理论值分析相一致,即发生异常气候年的概率为 48.1%,所占时间序列为 53.3%,寿命为 31.2 个月。

(1) 用 ΩFPE 的展开理论,研究了初始处于不稳定的状态,向稳态系统的演化,在最不稳定流型

表 1 El Niño 事件表

正海温距平时间	持续时间/月	极值出现时间	极值(°C)	El Niño	注
1963-04~1964-01	10	1963-07	0.75	1963(弱)	El. f
1965-04~1966-03	12	1965-12	1.27	1965	El. f
1968-07~1970-02	20	1969-05	1.04	1968/1969(弱)	El. s
1972-03~1973-03	13	1972-11	2.01	1972	El. f
1981-12~1983-09	22	1982-12	3.00	1882/1983	El. f, El. s
1986-07~1988-03	21	1987-09	1.48	1986/1987	El. f, El. s
1990-12~1992-07	20	1992-05	1.49	1991/1992	El. f, El. s
1997-01~1998-05	17	1997-12	3.90	1997/1998	El. f, El. s

表 2 La Nina 事件表

负海温距平时间	持续时间/月	极值出现时间	极值(°C)	La Nina 年
1964-02~1965-03	14	1964-05	-1.27	1964
1967-07~1968-06	12	1968-02	-1.24	1967
1970-05~1972-02	22	1970-07	-1.78	1970
1973-04~1974-05	14	1974-01	-1.57	1973
1974-07~1976-05	23	1975-12	-1.63	1975
1988-04~1989-06	15	1988-06	-1.83	1988

所决定下,系统只向一对对称的稳定态演化,一稳定态释为准正常的气候状态;另一稳定态释为异常气候状态,即强 ENSO 状态。

(2) 研究表明,即使初始条件分布不在原点,由确定性方程知,系统将向反对称的稳态演化,但在随机力的作用下,产生了与确定系统的本质区别,当 $t \rightarrow \infty$ 时,绝大部分概率仍然对半地分布在一对对称势井内,而反对称势井内几乎不存在概率分布。这与观测事实一致。

(3) 从动力学宏观理论上来看,准气候正常态与强 ENSO 是两个平衡态,遵循统一的动力学理论框架,它们有相同的时空尺度;ENSO 是南方涛动和 El Niño 循环的统称,将它们纳入统一的框架体系来研究,说明它们的合理性;但从微观理论上,南方涛动、El Niño 和 La Nina 三者又反映出气候不同的位相,如何反映出 El Niño 和 La Nina 位相转换等,应建立它们自己的动力学框架。

(4) 实际海-气振荡子系统,是一个复杂的非线性系统,仅讨论不稳定态的演化问题,得到一对对称

势各占概率一半,且理论值与观测事实相一致。但也不是完全相同,说明了系统也不是严格意义下的对称势。事实上 $\alpha > 0$, ϵ 取不同值时,广义势函数反映了复杂的不同特性(图 2c),研究简化海-气耦合模式,了解 ENSO 事件本质和特征,有益于建立海-气相互作用的理论。

参考文献

- [1] Bjerknes J. Atmospheric teleconnections from the equatorial pacific. *Mon Wea Rev.* 1969, 97:163-172
- [2] Barber R F, Chavez F P. Biological consequences of El Niño. *Science*, 1983, 222: 1203-1210
- [3] Ropelewski O F, Holpert M S. Global and regional scale precipitation patterns associated with El Niño southern oscillation. *Mon Wea Rev.* 1987, 115:1606-1625
- [4] 吴国雄, 孟文. 赤道印度洋-太平洋地区海气系统的齿轮式耦合和 ENSO 事件. *大气科学*, 1998, 22(4): 470-480
Wu Guoxiaong, Meng Wen. Gearing between the Indo-monsoon circulation and the Pacific Walker circulation and the ENSO, Part I: data analyses. *Scientia Atmospherica Sini-*

- ca, 1998, 22(4):470-480
- [5] 金祖辉,陶诗言. ENSO 循环与中国东部地区夏季和冬季降水关系的研究,大气科学,1999,23(6):663~671
Jin Zuhui, Tao Shiyan. A study on the relationships between ENSO cycle and rainfalls during summer and winter in Eastern China. *Scientia Atmospherica Sinica*, 1999, 23(6):663-671
- [6] 李崇银,穆明权. 异常东亚季风激发 ENSO 的数值模拟研究. 大气科学,1998,22(4):481~490
Li Chongyin, Mu Mingquan. Numerical simulations of anomalous winter monsoon in East Asia exciting ENSO. *Scientia Atmospherica Sinica*, 1998, 22(4):481-490
- [7] 李崇银. 频繁的强大东亚槽活动与 El 发生. 中国科学(B), 6:667~674
Li Chongyin. Frequent strong East Asian trough activities and El Niño occurrences. *Scientia Sinica*, 1988, 18 (6):667-674
- [8] Neelin J D. A hybrid coupled general circulation model for El studies. *J Atmos Sci*, 1998 47: 674-693
- [9] Graham N E, White W B. The El cyle: A natural osillator of the Pacific ocean-atmosphere system, *Science*, 1988, 240: 1293-1302
- [10] Graham N E, White W B. The role of the Western boundary in the ENSO Cycle: Experiments with coupled model. *J. Phys Res.*, 1990, 96: 3125-3150
- [11] 巢纪平. 厄尔尼诺和南方涛动动力学. 北京:气象出版社, 1993. 455pp
Chao jiping. Dynamics of El Niño and Southern Oscillation, Beijing, China Meterological Press, 1993, 455pp
- [12] McCreary J P, Anderson D L T. An overview of coupled ocean-atmosphere models of El Niño and the Southern oscillation. *J Geophys Res*, 1991, 96:3125-3150
- [13] Neelin J D, et al. Tropical air-sea interaction in general circulation models. *Climate Dynamics*, 1992, 7: 73-104
- [14] Graham N E, White W B. The El Niño cycle: A natural oscillator of the pacific ocean-atmosphere system. *Science*, 1988, 24: 1293-1302
- [15] Wang B, Fang Z. Chaotic oscillation of tropical climate: A dynamic system theory for ENSO. *J Atmos Sci*, 1996, 53:2786-2802
- [16] Wang B, Fang Z. Stochastic Dynamics of El Niño southern oscillation. *J Atmos Sci*, 1999, 56:5-23
- [17] Risken H. *The Fokker-Planck Equation*. New York:Springer. 1983. 587pp
- [18] Hu G, Lu E H. Numerical on Fokker-Planck equation of bi-stable system driven by colored noise. *Chinese Phys Lett*, 1992, 9(2):281-284
- [19] 封国林,曹鸿兴. 海气耦合模式的依时解. 应用气象学报, 1996,7(2):212~220
Feng Guolin, Cao Hongxing. Time-dependent solution of coupled air-sea climate model. *Quarterly Journal of Applied Meteorology*, 1996, 7 (4):212-220

DYNAMIC BEHAVIOR AND UNSTABLE STATE EVOLUTION OF OCEAN-ATMOSPHERE OSCILLATOR

Feng Guolin Dong Wenjie

(*Key Laboratory of National Meteorological Bureau Climate Research Center, Beijing 100081*)

Abstract

It is mathematically and thoroughly proved in this paper that the nonlinear stochastic ocean-atmosphere oscillator model possesses a stable limit cycle; then the model equations are transformed into the Fokker-Planck equation (FPE), and the evolution of El Niño-Southern Oscillation (ENSO) from unstable state to stable state is studied from the point of view of nonequilibrium system dynamics for the first time. The system evolution from an initially unstable state to a steady state has been studied in this paper in terms of FPE expansion theory, and under the dominance of the most unstable manifold the system evolves towards only to a pair of symmetric steady states: one is considered as quasi-normal climatic state, and the other as anomalous climatic state, i. e. strong ENSO state. This study indicates that even if the initial distribution is not at the origin state, known from the deterministic equations the system will evolve towards antisymmetric steady states, however under the effect of stochastic forcing, the system exhibits intrinsic differences from deterministic systems, i. e. when $t \rightarrow \infty$, the overwhelming majority probability still distributes half-and-half in a pair of symmetric potential wells, and there is almost no probability distribution in a pair of antisymmetric potential wells. This is in consistent with observational facts. Viewed from dynamic macro-theory, quasi-normal climate state and strong ENSO state are two equilibrium states, follows an unified dynamic theoretical framework, and have the same temporal/spatial scales; ENSO is a joint name of Southern Oscillations and El Niño cycles and bring them into an unified framework system in study is reasonable. However viewed from dynamic micro-theory, Southern Oscillations, El Niño and La Nina reflect different phases of Climate, in order to reflect the phase transition between El Niño and La Nina, it is necessary to establish their dynamic frameworks respectively.

Key words: ENSO, Fokker-Planck equation, Limit cycle, Ocean-atmosphere oscillator, Probability density