

# 最优差分方案<sup>\* 1</sup>

黄文誉 伍荣生

HUANG Wenyu WU Rongsheng

南京大学大气科学系,中尺度灾害性天气教育部重点实验室,南京,210093

Department of Atmosphere Sciences, Key Laboratory of Meso-scale Severe Weather/MOE, Nanjing University, Nanjing 210093, China

2008-04-25 收稿,2008-08-03 改回.

Huang Wenyu, Wu Rongsheng. 2009. An optimum scheme for finite difference. *Acta Meteorologica Sinica*, 67(6):1069—1079

**Abstract** In numerical prediction and numerical modeling, the general method to describe differential term in space is finite difference method, however, the using of finite difference method will introduce truncation error. Wu (1979) proposed that in order to improve the accuracy of difference term, a new field was constructed to replace the original physical field in the difference term. This paper is a sister paper of Wu (1979), the main purpose is to interpret the value of Wu (1979), and furthermore to give some more general difference themes. The difference theme in this paper combines both the advantages of finite difference method (fast calculating) and the spectral method (high accuracy). If a discrete Fourier expansion is made on a given grid, the frequency spectrum of the base function (sine or cosine) is fixed. In this paper, the generalized method of finding a 2-order (or more times) smoothing field is explored. The fundamental philosophy to obtain the smoothing field is making an optimum approximation at the fixed frequency spectrum. The upper threshold of smoothing was determined as 3 through observing the decreasing speed of the cumulative error of the frequency spectrum. The results of the numerical analysis reveal that the maximum error of the 2-order smoothing scheme is 0.04 of the classical scheme without any smoothing and 0.3 of the classical scheme with the same computation cost. The advection experiment also suggests that the new scheme is far more excellent than the classical scheme. The new difference scheme supplies a new road which improves the accuracy of numerical calculating without adding the grids.

**Key words** Difference accuracy, Smoothing, Frequency spectrum, Short and middle wave, Cumulative error

**摘要** 在数值预报和数值模拟中,描述空间微分项的最主要的方法是有限差分法,但使用差分方法会引入截断误差。伍荣生 1979 年指出,通过在原物理场的基础上构造一个新的物理场,替代原物理场进行差分计算,可以达到减小误差的目的。该文是伍荣生 1979 年工作的继续,目的在于解释伍荣生 1979 年所构造的差分格式并得到更为一般化的差分格式。文中给出新的差分格式结合了经典有限差分方法的快速计算和谱方法的高精度的优点。如果在一个给定的网格上对气象要素场进行离散傅里叶级数展开,则基函数(正弦或余弦)的频谱是事先已知的。作者将伍荣生 1979 年构造物理场的方法视为对物理场的一次平滑,探讨了获取二次平滑场、多次平滑的一般化方法。获取平滑场的基本原理是使得在固定频谱上的差分逼近程度达到最优。通过对频谱上的累计误差的下降速度分析表明,平滑次数的上限为 3 次。数值分析的结果表明,二次平滑的最大误差是未作任何平滑的最大误差的 0.04 倍,在使用相同计算代价的情况下,二次平滑的最大误差是经典的差分格式的 0.3 倍。平滑试验的结果也表明,新的差分格式即一次平滑、二次平滑方案的结果远远优于经典的差分格式。新的差分格式意义在于,在不加密网格的情况下提供了一条提高数值计算精度的途径。

**关键词** 差分逼近程度,平滑,频谱,中短波,累积误差

**中图法分类号** P456.7

\* 资助课题:公益性行业(气象)科研专项(GYHY200706033),国家自然科学基金(40333025),上海台风研究基金(2006STB04)。

作者简介:黄文誉,主要从事大气动力学和可预报性研究。E-mail:wyyellow@sina.com

## 1 引言

在数值预报和数值模拟中,对空间微分的处理方案有有限差分法、谱方法等,然而谱模式由于计算代价大,我们常常采用的方法是有限差分法。有限差分方法由于微分与差分之间截断误差的引入,必定会影响预报精度,Haltiner(1971)把物理量写成复指数的形式,讨论了差分逼近程度与波长的关系,指出波长越长,逼近程度越好,反之越差。根据傅里叶分析理论,一个周期的或有限区间的信号(或函数)可以分解为离散频率上的正弦或余弦函数(作为基函数),当然这种分解的基函数可以是正交的,也可以是斜交(若是斜交,则引入对偶基)。傅里叶分析理论成为气象上谱方法的基础,若不引入球谐函数,在一个给定的正方形网格上使用正弦或余弦函数展开,则这些函数的频率谱是已知的(由于网格是确定的,所进行的离散傅里叶变换与网格的格距和格点数目紧密相关)。本文中对空间微分的处理方式仍然是使用中央差分格式,不同的是在原来物理场的基础上构造一个新的物理场,替代原来的场进行中央差分计算,构造物理场的目标是使差分的逼近程度在给定的频谱上达到最优,所以本文中最重要的工作是构造物理场和频谱上差分计算最优。关于构造物理场和最优差分已有一些工作:伍荣生(1979)在一维的情形下使用权重方案、并使用最小二乘法使得在相关谱上达到最优差分,这个方案是本文的主要思想来源,我们将其称为一次平滑方案;崔新强等(1990)在伍荣生(1979)的基础上,分析了五点差分格式,并在均匀旋转风场条件下,采用不同的初值,对三维平流方程进行了长时间的数值积分,得到了一组最优的五点差分方案;Wang等(2002)使用了约束性代价函数原理提出了能够使空间截断误差最小化的中心差分优化算子,用变分连续同化的技术来最小化大气模式中的空间截断误差;李江涛(2006)通过使群速度相对误差最小求得一套最佳差分方案;蔡其发(2007)用变分方法重构了一个新的物理场替代原先场计算差分,得到了较好的效果。以上工作都在处理差分的空间截断误差的问题,认为中短波(或其对应的频率)是形成差分截断误差的主要原因,因而重点就是改善中短波(或其对应的频率)的差分逼近程度。对于中短波造成差分误差这一问题,其本质上可以认为是利用较少的、离散的空

间场信息去描述真实的物理量的微分项问题,显而易见,要解决这一问题,关键在于在离散的空间场不变的前提下(即空间网格距大小不变),要包含更多的空间信息。很自然地,为了提高差分的逼近程度,可以采用高阶精度的中央差分格式(使用泰勒展式能够轻易得到),然而这未必能够获得处理气象上的离散波动的最优差分方案,伍荣生(1979)曾经详细地讨论过这一问题。本文试图去寻找一种处理气象上固定离散频谱的最优差分方案,所设计的差分格式将适用于气象上如涡度、散度等包含差分计算的常规物理量,另外设计的较为低次的平滑格式同样适用于数值模拟。

## 2 最优频率范围选取和整数格距的波动

我们在文中使用最优方法选取频率时,选择

$$Kh(n) = \frac{2\pi}{40}n \quad n = 0, 1, 2, \dots, 20$$

其中  $K$  为波数,  $h$  为网格距,这个频谱假定了水平方向共有 40 个网格距(可以参照离散傅立叶变换),这个频率范围上对应的波动的波长未必完全是整数格距的波动,所以我们进行的最优并不是对整数格距波动进行的,另一方面,在检验误差(包括本文中图形的误差分析和数值模拟)时所使用的波动的范围为 3 格距到 22 格距上整数格距的波动。然而上述两个方面并不是矛盾的,利用傅里叶变换的理论,可以把整数格距的波动(也可以是非整数的)当作实际气象的信号,这些整数格距的波动可以表示为最优选取的离散的频率分量。另外我们声明,本文中的最优差分方案与网格特征紧密相关,我们假定了水平方向共有 40 个网格距,然而文中在模拟理想个例的时候水平方向的网格距为 32 个,我们没有另外选取最优差分方案而结果较好的原因是这两种网格所决定的最优频谱是相近的。

## 3 误差分析

由于气象上很重要的两个物理量——涡度、散度计算涉及到差分逼近问题,本文中以涡度、散度为例引出问题。

分析利用中央差分格式造成计算涡度、散度误差的原因,在平面直角坐标系中,涡度和散度分别可以表示成:  $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ , 假定  $u$ 、 $v$  的空

间分布为

$$u = U_e^{i(K_1x+K_2y)}, v = V_e^{i(K_1x+K_2y+\theta)}$$

其中,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $K_1, K_2$  分别表示的是速度场在  $x, y$  方向上的波数,  $\theta$  表示的是  $u, v$  的位相差,  $U, V$  分别是  $u, v$  的尺度大小。将  $u, v$  的表达式代入  $\zeta, D$  中, 可知精确的涡度、散度为

$$\zeta = iK_1v - iK_2u \quad D = iK_1u + iK_2v$$

为了要利用中央差分格式进行计算, 必须首先在空间水平区域上划分网格, 取正交网格

$x = ih, y = jh$ , 其中,  $h$  为网格距,  $i, j$  分别取  $\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots$ , 对应地给出  $u, v$  在这些网格点上的精确值, 由中央差分格式, 可知在网格点  $(i, j)$  上的涡度和散度  $(\zeta_0, D_0)$  为

$$\zeta_0 = \frac{\sin K_1 h}{K_1 h} i K_1 v - \frac{\sin K_2 h}{K_2 h} i K_2 u,$$

$$D_0 = \frac{\sin K_1 h}{K_1 h} i K_1 u + \frac{\sin K_2 h}{K_2 h} i K_2 v$$

令  $Q = \frac{\sin Kh}{Kh}$ ,  $K$  为  $x$  或  $y$  方向上的波数, 当  $Q \rightarrow 1$  时,  $(\zeta_0, D_0) \rightarrow (\zeta, D)$ 。由此可知  $Q = \frac{\sin Kh}{Kh}$  能够很好地表征差分的逼近程度, 可以用  $|1 - Q|$  来表征差分的相应误差。研究  $|1 - Q|$  与  $Kh$  的关系, 也可转换为研究  $|1 - Q|$  与  $L$  波长的关系, 由于 2 格距的波动是噪声 (Haltiner, 1971), 需要滤去, 这样在气象上我们所关心的是离散波谱就可以认为是 3 格距

到无穷格距的波动, 由于有关系  $K = 2\pi/L, L$  为  $x$  或  $y$  方向上的波长, 图 1 中给出了波长从 3 格距到 22 格距范围内的整数格距波动和无穷格距对应的  $|1 - Q|$  的大小 (图 1a), 可以发现误差  $|1 - Q|$  随着波动波长的增加而减小, 并且中短波的误差十分大 (这也就是用中央差分格式造成涡度、散度计算的例子中误差的主要原因), 例如 3 格距的波动误差得到近 60%, 4 格距的波动误差也达到 35% 左右。为了克服差分计算中短波的误差, 伍荣生 (1979) 曾经提出过用一个新的速度场  $(Ru, Rv)$  代替原先的速度场  $(u, v)$ , 其中  $R$  为修正因子, 来进行涡度和散度的差分计算, 以获得精度较高的涡度和散度场。为了确定修正因子  $R$ , 伍荣生 (1979) 用如下的物理场来替代原来的场

$$\bar{f}_{1,j} = 1.438f_j - 0.219(f_{j+1} + f_{j-1})$$

$\bar{f}_{1,j}$  为新的物理场,  $f_j$  为物理量在点  $j$  (一维的情况) 的值, 这种新的替代场从形式上看, 完全类似于对原来物理场的一种平滑 (以后我们称之为一次平滑), 这就是我们提出二次平滑甚至多次平滑来克制中短波误差的思想来源。可知修正因子为  $R(K) = 1.438 - 0.438 \cos Kh$ , 经过修正后的可以用  $|1 - RQ|$  来表征新的涡度和散度场的误差, 图 1 中还给出了波长从 3—22 格距范围内的整数格距波动和无穷格距对应的误差  $|1 - RQ|$  的大小 (图 1b), 明显地, 中短波的误差得到了大幅度的抑制。

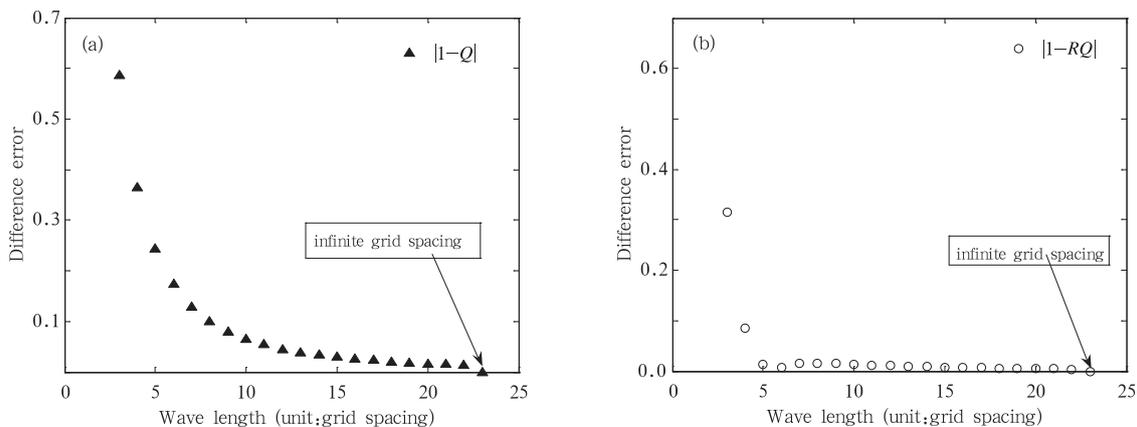


图 1 3—22 格距的波动差分误差

(a, b 分别表示的是  $|1 - Q|$  和伍荣生 (1979) 的差分误差  $|1 - RQ|$ , 箭头表示的是无限格距波动的差分误差 (都为 0))

Fig. 1 Difference error for wavelength of 3 to 22 grid spacings

(a.  $|1 - Q|$ , b.  $|1 - RQ|$  (Wu(1979)); The arrow here indicates the error for infinite grid spacing is 0)

在进行数值天气预报时,每一时步的差分与微分之间的微小误差(如 1%)经过长时间积分后,将会导致误差累积,以致影响预报的精度,因此提高差分的精确程度至关重要,在图 1 中可以看出不论是修正前(图 1a)或是修正后(图 1b),在 3 格距和 4 格距波动处误差始终都很大(当然在其他格距波动处也仍含有误差),因此需要寻找一种克制中短波误差的方法。

本文贯穿两个基本思想:

(1) 优先描述好背景场,在描述好背景场的前提下,描述好包含在背景场中的较小尺度(或其对应的频率)的运动,直至描述好所有的运动,即在使长波(或其对应的频率)的差分逼近程度达到最佳的前提下,逐步使中短波(或其对应的频率)的差分逼近程度达到最优;

(2) 使用在原物理场基础上构造新的物理场的方法,伍荣生(1979)使用的方法本质上是进行了一次平滑处理,本文中将要给出的方法是在一次平滑的基础上如何确定二次平滑、三次平滑以致多次平滑系数的方法,即要给出一种提高差分精度的推广方法:在精度没有达到要求的情况,多进行几次平滑,使得差分的逼近程度达到要求。

#### 4 二次平滑的处理方法

所谓二次平滑的处理方法,就是对经过一次平滑的物理场再进行一次平滑处理,用处理得到的二次平滑的物理场来进行差分计算。

$$\text{令 } \bar{f}_{1,j} = A_1 f_j + A_2 (f_{j+1} + f_{j-1}) \quad (1)$$

其中  $\bar{f}_{1,j}$  为经过一次平滑后得到的物理量场,  $A_1$ 、 $A_2$  为待定系数。

对经过一次平滑后的物理量场再进行一次平滑处理

$$\bar{f}_{2,j} = B_1 \bar{f}_{1,j} + B_2 (\bar{f}_{1,j+1} + \bar{f}_{1,j-1}) \quad (2)$$

其中  $\bar{f}_{2,j}$  为二次平滑场,  $B_1$ 、 $B_2$  为待定系数。

将式(1)代入式(2)可得

$$\bar{f}_{2,j} = (A_1 B_1 + 2A_2 B_2) f_j + (A_1 B_2 + A_2 B_1) \times (f_{j+1} + f_{j-1}) + A_2 B_2 (f_{j+2} + f_{j-2}) \quad (3)$$

$$\text{令} \quad \begin{aligned} A &= A_1 B_1 + 2A_2 B_2, \\ B &= A_1 B_2 + A_2 B_1, \\ C &= A_2 B_2 \end{aligned} \quad (4)$$

式(3)最后可以写为

$$\bar{f}_{2,j} = A f_j + B (f_{j+1} + f_{j-1}) + C (f_{j+2} + f_{j-2}) \quad (5)$$

$$\text{设物理场满足: } \bar{f}_j = e^{ikx} \quad (6)$$

由式(5)、(6)可知二次平滑对原来物理场的修正因子  $R(K)$  可以写为

$$R(K) = A + 2B \cos Kh + 2C \cos 2Kh \quad (7)$$

而表征中央差分格式逼近程度的因子为

$$Q = \frac{\sin Kh}{Kh} \quad (8)$$

则表征经过二次平滑场的中央差分格式逼近程度的因子为

$$RQ = (A + 2B \cos Kh + 2C \cos 2Kh) \frac{\sin Kh}{Kh} \quad (9)$$

接下来的问题就归结为寻找新的待定系数  $A$ 、 $B$ 、 $C$ , 以使得在  $Kh \in [0, \pi]$  的范围内  $RQ$  充分逼近 1。

我们在引言部分提到处理问题的中心思想是优先考虑背景场的差分逼近程度,即首先要使无限格距波动的逼近程度达到最好,则有

$$L \rightarrow \infty, \quad Kh \rightarrow 0, \quad RQ \rightarrow 1 \quad (10)$$

$$\text{代入式(9)可得} \quad A + 2B + 2C = 1 \quad (11)$$

在这里会用到最小二乘法来挑选最优的系数,然而首先要考虑差分的精度,二次平滑场的中央差分可以写为:

$$\left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right]_j = \frac{\bar{f}_{j+1} - \bar{f}_{j-1}}{2h} \quad (12)$$

将式(5)代入式(12)中,可以得到

$$\left[ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right]_j = (A - C) \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} + 2B \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4h} + 3C \frac{f_{j+3} - f_{j-3}}{6h} \quad (13)$$

利用泰勒展式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_j + \frac{h^2}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_j + \\ &\frac{h^4}{5!} \left( \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \right)_j + \frac{h^6}{7!} \left( \frac{\partial^7 f}{\partial x^7} \right)_j + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4h} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_j + \frac{(2h)^2}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_j + \\ &\frac{(2h)^4}{5!} \left( \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \right)_j + \frac{(2h)^6}{7!} \left( \frac{\partial^7 f}{\partial x^7} \right)_j + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{f_{j+3} - f_{j-3}}{6h} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_j + \frac{(3h)^2}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_j + \\ &\frac{(3h)^4}{5!} \left( \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \right)_j + \frac{(3h)^6}{7!} \left( \frac{\partial^7 f}{\partial x^7} \right)_j + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

将式(14)、(15)、(16)代入式(12)可得

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]_j &= (A - C + 2B + 3C) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j + \\ &[(A - C) + 8B + 27C] \frac{h^2}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_j + O(h^4) \end{aligned} \quad (17)$$

由式(11),式(17)可以改写为

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right]_j &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j + [(A - C) + 8B + \\ &27C] \frac{h^2}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_j + O(h^4) \end{aligned} \quad (18)$$

我们使经过二次平滑的物理场的差分逼近程度为  $O(h^4)$ ,即使得下式成立:

$$(A - C) + 8B + 27C = 0 \quad (19)$$

由式(11)、(19)两式可以解得

$$B = -\frac{2}{3}A + \frac{13}{18} \quad (20)$$

$$C = \frac{A}{6} - \frac{2}{9} \quad (21)$$

将式(20)、(21)两式代入式(9)中,并且令

$$a = \left(1 - \frac{4}{3}\cos Kh + \frac{1}{3}\cos 2Kh\right) \frac{\sin Kh}{Kh} \quad (22)$$

$$b = \left(\frac{13}{9}\cos Kh - \frac{4}{9}\cos 2Kh\right) \frac{\sin Kh}{Kh} \quad (23)$$

则式(9)可以写为  $RQ = aA + b$  (24)

接下来的问题就归结为寻找系数  $A$ ,以在  $Kh \in [0, \pi]$  的范围内  $RQ$  充分逼近 1。将区间  $[0, \pi]$  20 等分,则有 19 个等分点,加上两个边界点共有 21 个点,在使用最小二乘法时同样要考虑引言中提到的基本思想(1):优先描述好背景场,在描述好背景场的前提下,描述好包含在背景场中的较小尺度(或其对应的频率)的运动,直至描述好所有的运动,即在使无限格距的差分逼近程度达到最佳的前提下,逐步使中短波(或其对应的频率)的差分逼近程度达到最优。所以我们在选择 21 个点内要进入最小二乘法考虑范围时,优先选择波长较长(或其对应的频率)的波动,其次选择考虑中短波(或其对应的频率),具体方法为

$$\text{令 } Kh(n) = \frac{\pi}{20}n \quad n = 0, 1, 2, \dots, 20 \quad (25)$$

随着  $n$  的增大,式(25)依次描述了无限格距的波动、长波、中短波以至 2 格距波长的波动,这样我们可以设一个  $N$ ,使  $n$  从 0 到  $N$  的范围进入最小二乘法考虑的范围,从而达到先优化长波,其后优化中短波的

目的(会有一些短波不进入考虑的范围),这里  $N \in [1, 20]$ 。

$$\text{令 } J = \sum_{Kh(n)=Kh(0)}^{Kh(N)} (RQ - 1)^2 \quad (26)$$

这里用  $J$  来表征所考虑的波动经过二次平滑后的差分计算的总误差。将式(24)代入式(26)可得

$$J = \sum_{Kh(n)=Kh(0)}^{Kh(N)} (aA + b - 1)^2 \quad (27)$$

为了使  $J$  取得极小值,令  $\frac{\partial J}{\partial A} = 0$  (28)

$$\begin{aligned} \text{可得 } A &= \sum_{Kh(n)=Kh(0)}^{Kh(N)} a(1 - b) \cdot \\ &\left(\sum_{Kh(n)=Kh(0)}^{Kh(N)} a^2\right)^{-1} \end{aligned} \quad (29)$$

由于  $N \in [1, 20]$ ,这样可以得到 20 组  $A$  的值,取其中最优的一组: $N = 10$  时,  $A = 1.6575$  (在确定  $N$  时做了对频率谱上的累积误差统计,当累积误差最小时取得最优的值),将其代入式(20)、(21)两式中可以得到

$$A = 1.6575, B = -0.3828, C = 0.0540 \quad (30)$$

将式(30)代入式(5)中,得出二次平滑场的计算式:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{2,j} &= 1.6575f_j - 0.3828(f_{j+1} + f_{j-1}) + \\ &0.0540(f_{j+2} + f_{j-2}) \end{aligned} \quad (31)$$

## 5 二维差分、二阶差分的处理

在实际的数值天气预报中,物理场总是三维的,即使是涡度、散度的计算中,也需要速度场至少是二维的,而在第 4 部分中给出的情况都是一维的,在原始方程中差分主要是一阶,很少会遇到二阶差分的情况。在这里我们给出二维差分、二阶差分的处理方式,为了计算的方便和节省计算资源,这里给出的处理方式都是基于一阶差分的一维处理方法的,即第 4 部分中的处理方法。

二维、一阶差分的处理方式:设物理量场为  $f$ ,  $f$  是二维的,现在要计算二维、一阶差分  $\frac{\partial f}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 。在计算  $\frac{\partial f}{\partial x}$  的时候,只要假设物理量场  $f$  是  $x$  上的一维函数,与  $y$  无关,用第 4 部分中的方法去获得替代场  $\bar{f}$ ,以进行差分计算,获得  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$ 。类似地,也可以计算出  $\frac{\partial f}{\partial y}$ 。

二维、二阶差分的处理方式:设物理量为  $f$ ,  $f$  是二维的, 现在要计算二维、二阶差分  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ 。为了计算  $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ , 首先用二维、一阶差分的处理方式计算出  $\frac{\partial f}{\partial y}$  的大小, 然后再使用一次二维、一阶差分的处理方式便可以获得  $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$  (其实是利用了  $\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ )。类似地, 不难获得  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 。(一维二阶的情况是二维、二阶差分的处理方式的一个特例, 这里不予给出)。

### 6 数值分析和一个理想个例的数值模拟

#### 6.1 数值分析

首先给出经过一次平滑和二次平滑修正后的中央差分误差  $|1-RQ|$  的对比(图 2), 从图 2 中可以发现, 经过二次平滑, 3 格距波动的误差仅为 18% 左右, 4 格距波动为 1% 左右, 而经过一次平滑, 3 格距波动的误差在 30% 以上, 4 格距波动的误差为 8% 左右; 另外, 大尺度背景场(即较长的波动)的误差也有微小地改善(图中并未明显地给出), 可见用经过二次平滑得到的物理场代替原来的物理场进行差分计算, 对差分精度的提高是有明显作用的。

为了进一步比较方案的优劣性, 给出一个风场, 要求对其涡度、散度进行诊断分析, 水平风场为(这是一个典型的中尺度扰动):

$$u = 20\sin(\frac{2\pi}{60h}x)\cos(\frac{2\pi}{90h}y) + 0.2\sin(\frac{2\pi}{4h}x)\cos(\frac{2\pi}{5h}y)$$

$$v = 20\sin(\frac{2\pi}{60h}y)\cos(\frac{2\pi}{90h}x) + 0.2\sin(\frac{2\pi}{4h}y)\cos(\frac{2\pi}{5h}x)$$

每隔单位格距 ( $h = 200$  km) 给出区域:  $x \in [28h, 61h]$ ,  $y \in [h, 34h]$  上的精确风速分布, 利用不同的方法(中央差分、一次平滑、二次平滑)对区域:  $x \in [32h, 57h]$ ,  $y \in [5h, 30h]$  进行诊断分析。为了方便比较, 不给出整块区域的涡度、散度分布及不同方法产生的误差分布, 我们取在  $x = 41h$ ,  $y \in [5h, 30h]$  上的涡度分布和不同方法对应的误差分布(图 3),  $x = 40h$ ,  $y \in [5h, 30h]$  上的散度分布和不同方法对应的误差分布(图 4), 图 3、图 4 的误差分布位相相反, 如在横坐标 20 处涡度误差相对较小, 这主要是由于所选取的理想风场的位相决定的。

从图 3 和图 4 中可以发现, 经过一次平滑的物理场用来进行差分计算差分逼近程度好于未经过任何处理的中央差分, 而二次平滑的逼近程度好于一次平滑, 在其他区域亦有类似的情况, 这里不再给出。

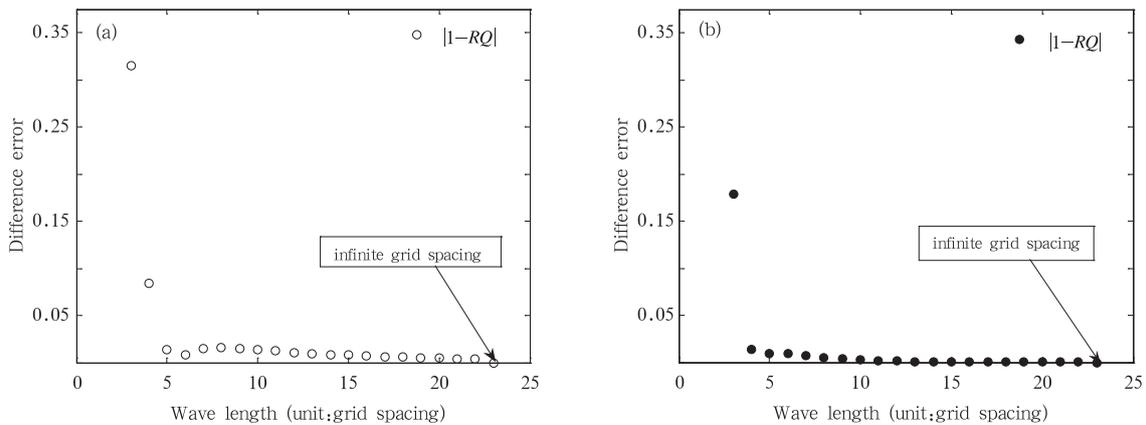


图 2 3—22 格距的波动差分误差  $|1-RQ|$

(a、b 分别为伍荣生(1979)即一次平滑的情况和二次平滑的情况。

箭头表示的是无限格距波动的差分误差(都为 0))

Fig. 2 Difference error for  $|1-RQ|$  wavelength of 3 to 22 grid spacings

(a. first smoothing case (Wu(1979)), b. secondary smoothing case. The arrow

here indicates the error for infinite spacings is 0)

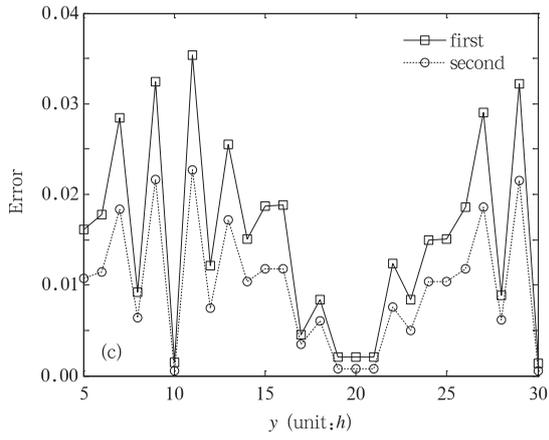
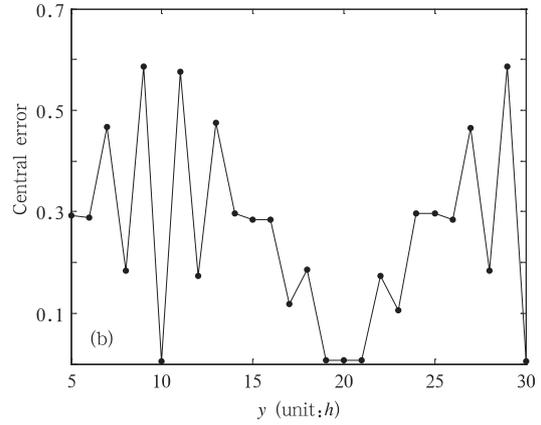
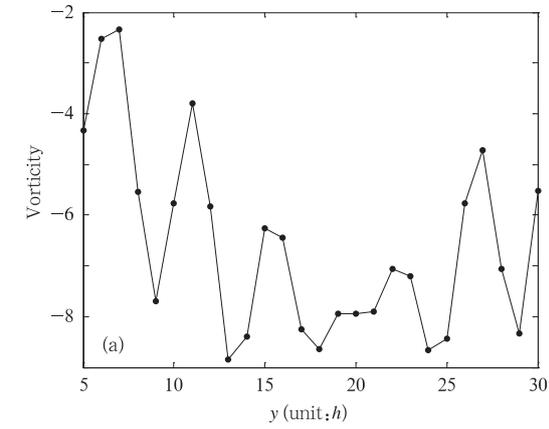


图3 在  $x = 41h, y \in [5h, 30h]$  上的涡度分布 (a) 和用不同平滑场计算得到的涡度的误差分布 (单位:  $10^{-6} s^{-1}$ ) (b, c 分别为未经任何平滑、一次和二次平滑的情况)  
Fig. 3 Vorticity distribution (a) and error distribution for central difference (b), and for first and secondary smoothing (c) for line  $x = 41h, y \in [5h, 30h]$  (unit:  $10^{-6} s^{-1}$ )

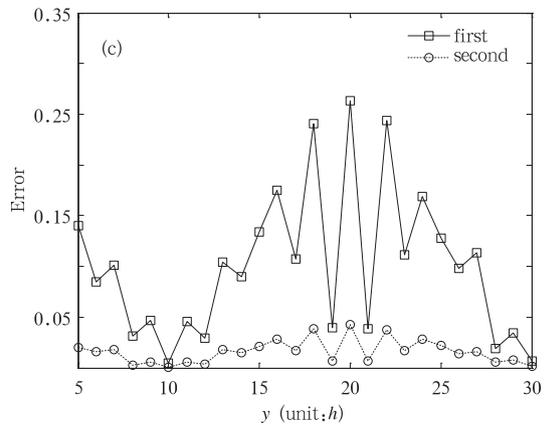
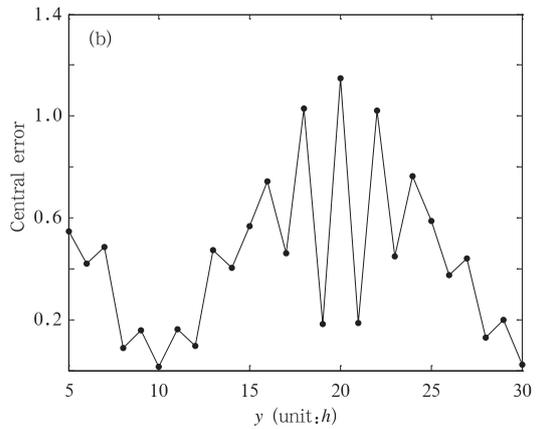
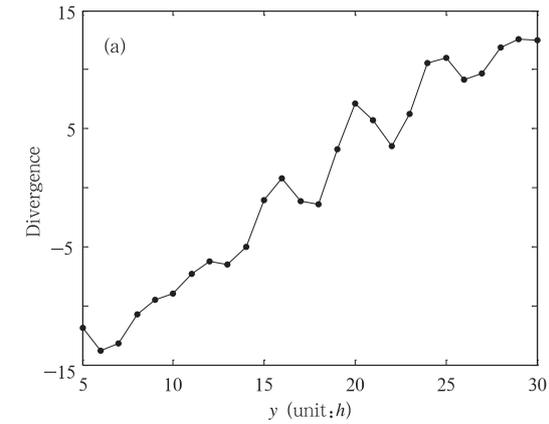


图4 与图3类似,但是在  $x = 40h, y \in [5h, 30h]$  上的散度分布及误差分布的情况  
Fig. 4 As in Fig. 3 except for the divergence distribution and error distribution on line  $x = 40h, y \in [5h, 30h]$

## 6.2 一个理想个例的数值模拟

大气动力方程组是一个强非线性系统,即在一般情况下解析解是不易获得的,幸运的是陈雄山(1979)在研究二维平流方程组时给出了几个理想个例,这几个个例都是具有解析解的。我们引用其中一个并稍作改变,以检验平滑方案是否有效。具体如下,考虑二维平流方程:

$$\partial H/\partial t + u\partial H/\partial x + v\partial H/\partial y = 0$$

其中  $H(x, y, t)$  是被平流的任一物理量,  $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$  分别是水平方向上的风速分量,在两个水平方向上都取以  $D$  为周期的边界条件:

$$\begin{aligned} H(x+D, y, t) &= H(x, y+D, t) = \\ &H(x+D, y+D, t) = H(x, y, t) \\ u(x+D, y) &= u(x, y+D) = \\ &u(x+D, y+D) = u(x, y) \\ v(x+D, y) &= v(x, y+D) = \\ &v(x+D, y+D) = v(x, y) \end{aligned}$$

初始场取为:

$$H(x, y, 0) = \sin(2\pi x/16) + \sin(2\pi x/8)$$

定常风场取为

$$u = \alpha \quad v = \alpha(1 + 2\pi x/D)$$

其中  $\alpha$  为常数。取空间网格距:  $\Delta x = \Delta y = d = 1$ , 时间步长  $\Delta t = 0.5$ ,  $D = 32$ , 水平方向的格点数为  $N = D/d = 32$ , 并且取周期  $T = 400$ , 即  $800 \Delta t$ , 常数  $\alpha = D/T = 0.08$ , 这样经过  $T$  时刻  $x, y$  两个方向上移动的距离各为  $D$ , 即经过  $T$  的解析解即为初始场。

我们检验数值模式中常用的二阶平流方案、四阶平流方案和我们的一次、二次平滑方案,得到常用的平流方案的均方差分别是 0.8537 和 0.4762, 可知由于积分步长较小,完成一个周期积分进行了 800 步积分,累积误差很大,预报场对解析解的描述能力很差;而一次平滑、二次平滑方案的均方差分别为 0.1502 和 0.1218, 描述解析解的能力较强,在这里水平方向的网格距为 32 个网格距,我们没有另外选取最优差分方案而结果较好的原因是这两种网格所决定的最优频谱是相近的。

## 7 提高差分精度的推广方法:多次平滑

第 3 部分讲述了进行二次平滑的过程:(1)首先使得无限格距波动的差分误差为 0;(2)用泰勒展开的方法定出一组系数关系;(3):最后使用最小二乘法定出所有系数。这一部分将利用第 4 部分中类似的方法来给出提高差分精度的一般化方法。

一个经过  $n$  次平滑的物理场可以写为

$$\begin{aligned} \bar{f}_{n,j} &= A_{n,0} f_j + A_{n,1} (f_{j+1} + f_{j-1}) + \\ &A_{n,2} (f_{j+2} + f_{j-2}) + \dots + A_{n,k} \\ &(f_{j+k} + f_{j-k}) + \dots + A_{n,n-1} (f_{j+n-1} + \\ &f_{j-(n-1)}) + A_{n,n} (f_{j+n} + f_{j-n}) \end{aligned} \quad (32)$$

其中  $\bar{f}_{n,j}$  表示经过  $n$  次平滑的物理场,  $A_{n,k}$  则表示经过  $n$  次平滑的物理场后的待定系数。

由式(32)可知经过  $n$  次平滑后的修正因子为

$$\begin{aligned} R(K) &= A_{n,0} + 2A_{n,1} \cos Kh + 2A_{n,2} \cdot \\ &\cos 2Kh + \dots + 2A_{n,k} \cos kKh + \dots \\ &2A_{n,n-1} \cos(n-1)Kh + 2A_{n,n} \cos nKh \end{aligned} \quad (33a)$$

则表征  $n$  次平滑场的中央差分格式的差分逼近程度因子为

$$\begin{aligned} RQ &= [A_{n,0} + 2A_{n,1} \cos Kh + 2A_{n,2} \cdot \\ &\cos 2Kh + \dots + 2A_{n,k} \cos kKh + \dots + 2A_{n,n-1} \\ &\cos(n-1)Kh + 2A_{n,n} \cos nKh] \left( \frac{\sin Kh}{Kh} \right) \end{aligned} \quad (33b)$$

问题归结为在  $Kh \in [0, \pi]$  的范围内  $RQ$  充分逼近 1, 共有  $n+1$  个系数需要确定。随后可以完全仿照第 2 部分二次平滑的例子去确定系数。

首先使无限波长的波动的差分逼近程度为 1, 即

$$L \rightarrow \infty, Kh \rightarrow 0, RQ \rightarrow 1 \quad (34)$$

可得

$$\begin{aligned} A_{n,0} + 2A_{n,1} + 2A_{n,2} + \dots + 2A_{n,k} + \dots \\ 2A_{n,n-1} + 2A_{n,n} = 1 \end{aligned} \quad (35)$$

然后用经过  $n$  次平滑的物理量场去计算差分,可知

$$\left[ \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial x} \right]_j = \frac{\bar{f}_{n,j+1} - \bar{f}_{n,j-1}}{2h} \quad (36)$$

将式(32)代入式(36)可得

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial x} \right]_j &= (A_{n,0} - A_{n,2}) \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} + \\ &2(A_{n,1} - A_{n,3}) \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4h} + \dots + \\ &k(A_{n,k-1} - A_{n,k+1}) \frac{f_{j+k} - f_{j-k}}{2kh} + \dots \\ &+ nA_{n,n-1} \frac{f_{j+n} - f_{j-n}}{2nh} + (n+1)A_{n,n} \cdot \\ &\frac{f_{j+n+1} - f_{j-n-1}}{2(n+1)h} \end{aligned} \quad (37)$$

由泰勒展式可表示出  $\frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h}$ 、 $\frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4h}$ 、 $\dots$ 、 $\frac{f_{j+k} - f_{j-k}}{2kh}$ 、 $\dots$ 、 $\frac{f_{j+n} - f_{j-n}}{2nh}$ 、 $\frac{f_{j+n+1} - f_{j-n-1}}{2(n+1)h}$ , 代入式(37)中,并使

$$\left[ \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial x} \right]_j = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_j + O(h^{2n}) \quad (38)$$

联系使用式(35)可以得到以下  $n-1$  个关于待定系数的方程:

$$1^3(A_{n,0} - A_{n,2}) + 2^3(A_{n,1} - A_{n,3}) + \dots + k^3(A_{n,k-1} - A_{n,k+1}) + \dots + n^3 A_{n,n-1} + (n+1)^3 A_{n,n} = 0 \quad (39)$$

$$1^5(A_{n,0} - A_{n,2}) + 2^5(A_{n,1} - A_{n,3}) + \dots + k^5(A_{n,k-1} - A_{n,k+1}) + \dots + n^5 A_{n,n-1} + (n+1)^5 A_{n,n} = 0 \quad (40)$$

⋮

$$1^{2l+1}(A_{n,0} - A_{n,2}) + 2^{2l+1}(A_{n,1} - A_{n,3}) + \dots + k^{2l+1}(A_{n,k-1} - A_{n,k+1}) + \dots + n^{2l+1} A_{n,n-1} + (n+1)^{2l+1} A_{n,n} = 0 \quad (41)$$

⋮

$$1^{2n-3}(A_{n,0} - A_{n,2}) + 2^{2n-3}(A_{n,1} - A_{n,3}) + \dots + k^{2n-3}(A_{n,k-1} - A_{n,k+1}) + \dots + n^{2n-3} A_{n,n-1} + (n+1)^{2n-3} A_{n,n} = 0 \quad (42)$$

$$1^{2n-1}(A_{n,0} - A_{n,2}) + 2^{2n-1}(A_{n,1} - A_{n,3}) + \dots + k^{2n-1}(A_{n,k-1} - A_{n,k+1}) + \dots + n^{2n-1} A_{n,n-1} + (n+1)^{2n-1} A_{n,n} = 0 \quad (43)$$

由以上  $n-1$  个方程和式(35)这  $n$  个方程可以将  $A_{n,0}, A_{n,1}, A_{n,2}, \dots, A_{n,n-1}, A_{n,n}$  这  $n+1$  个系数用  $A_{n,0}$  来表示,则  $RQ$  可以写为

$$RQ = aA_{n,0} + b \quad (44)$$

接下来完全可以如同式(26)、(27)、(28)、(29),使用最小二乘法去确定  $A_{n,0}$ ,由此确定  $A_{n,0}, A_{n,1}, A_{n,2}, \dots, A_{n,n-1}, A_{n,n}$  这  $n+1$  个系数。

上述确定平滑系数的方法有点类似于确定经典的  $2(n+1)$  个空间格点的中央差分格式,不同的是确定最后一组平滑系数关系用到了最小二乘法,从后文对二次平滑例子的分析可知,尽管经过  $n$  次平滑的物理量场的  $2(n+1)$  个空间格点的中央差分格式的精度为  $O(h^{2n})$ ,经典的  $2(n+1)$  个空间格点中央差分格式的精度为  $O(h^{2(n+1)})$ ,然而对于气象上的离散波谱经过  $n$  次平滑的物理量场的  $2(n+1)$  个空间格点的中央差分格式效果要好很多。

## 8 平滑的上限和精度的改善问题

### 8.1 平滑的上限

我们在原来一次平滑的基础上提出了二次平

滑,发现效果大有改善,那么是否平滑的次数越多越好?首先必须要说明的是对原来的物理量场进行平滑计算,必然要减小预报区域,多增加一次平滑就会减少四周边界上的一层区域;其次在减少预报区域和提高精度之间要作出一个合理的权衡是必要的,由于误差主要是由中短波造成,尤其是3格距、4格距(或者是相应的频率)波动,多进行一次平滑是否能够大幅度地提高3格距、4格距(或者是相应的频率)波动精度是问题的关键。

为了进行一个合理地权衡,定义3—22格距(或者是相应的频率)的波动上经过平滑处理后的差分累积误差为:

$E_{\text{total}}(i) = \sum |RQ-1|$ ,  $\sum$  表示对3—22格距的波动经过  $i$  次平滑的差分误差进行连加处理。

由于长波的差分误差较小,故上界22可以稍大或稍小,但不影响结果,这里也可以对  $Kh(n) = \frac{\pi}{20}n$ ,  $n=0,1,2,\dots,20$  这些频率上的波动进行连加处理,同样地,这也并不影响下面的结果。

我们使用第4、7部分中的方法给出四次以下的平滑方式。

零次平滑:  $f_{0,j} = f_j$

一次平滑:  $f_{1,j} = 1.438f_j - 0.219(f_{j+1} + f_{j-1})$

二次平滑:  $f_{2,j} = 1.6575f_j - 0.3828(f_{j+1} + f_{j-1}) + 0.0540(f_{j+2} + f_{j-2})$

三次平滑:  $f_{3,j} = 1.8334f_j - 0.5250(f_{j+1} + f_{j-1}) + 0.1234(f_{j+2} + f_{j-2}) - 0.0150(f_{j+3} + f_{j-3})$

四次平滑:  $f_{4,j} = 1.8735f_j - 0.5650(f_{j+1} + f_{j-1}) + 0.1551(f_{j+2} + f_{j-2}) - 0.0297(f_{j+3} + f_{j-3}) + 0.0028(f_{j+4} + f_{j-4})$

以上各次平滑的累积误差为

$$E_{\text{total}}(0) = 2.0690, E_{\text{total}}(1) = 0.5676,$$

$$E_{\text{total}}(2) = 0.2348, E_{\text{total}}(3) = 0.1198,$$

$$E_{\text{total}}(4) = 0.0858$$

从以上结果可以看出平滑的次数越多,累积误差越小;然而随着平滑次数的增多,累积误差降低的速度变慢。由累积误差降低的速度我们定义平滑次数上限:

若  $E_{\text{total}}(i) - E_{\text{total}}(i+1) < \frac{1}{i} E_{\text{total}}(i)$ , 则平滑次数的上限为  $i(i \neq 0)$ 。

从累积误差的结果中可以知道,平滑次数的上限为 3,当然上述平滑次数的上限的限定有一定的人为因素,在实际应用中可以根据不同的需要来确定平滑的次数。

8.2 精度的改善问题

傅里叶提出一个函数(信号)可以分解为不同频率上的正弦或余弦函数(信号),当然分解的基函数可以是正交的,也可以是非正交的,常规的处理是用正交基函数进行,若使用非正交基函数的话,引入对偶基,即可完成处理。通常的差分格式不会去考虑函数或信号的这种性质,我们所进行的处理正是考虑了这一性质后,使差分格式在离散频率或离散波谱上达到最优。在第 6 部分的结尾提到经过  $n$  次平滑的物理量场的  $2(n+1)$  个空间格点的中央差分格式比经典的  $2(n+1)$  个空间格点中央差分格式效果要好很多,并非是指差分的阶数得到了提高,而是指差分在离散的频率或者波谱上达到最优,而经典的差分格式考虑的情况是连续的频率或波谱。当然在气象上有高精度、高计算代价的谱方法,其进行离散的球谱变换时会考虑到具体的网格,我们在使用本文中的平滑思想时要用到的离散波谱同样将针对具体的网格特征(如水平方向的格点数),这种离散波谱一旦确定,在整个积分期间将不会改变,因为它是由网格特征决定的。为了更进一步地说明问题,在这里以二次平滑为例,经过二次平滑的中央差分可以写为。

$$\frac{\bar{f}_{j+1} - \bar{f}_{j-1}}{2h} = 1.6035 \left( \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} \right) -$$

$$0.7656 \left( \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4h} \right) + 0.1620 \left( \frac{f_{j+3} - f_{j-3}}{6h} \right)$$

用泰勒展式得到的经典的六阶精度的中央差分格式为

$$\frac{3}{2} \left( \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} \right) - \frac{3}{5} \left( \frac{f_{j+2} - f_{j-2}}{4h} \right) + \frac{1}{10} \left( \frac{f_{j+3} - f_{j-3}}{6h} \right)$$

平滑方案的阶数为  $O(h^4)$ ,经典的阶数为  $O(h^6)$ ,图 5 给出了两种情况的比较,经过二次平滑,3 格距波动的差分误差仅为 18%左右,4 格距波动为 1%左右,而经典格式在 3 个格距处的差分误差为 26%左右,4 格距波动处的差分误差为 6%以上,5 格距波动差分误差也较大,由此说明了第 6 部分的结尾中提出的问题,并且在 7.1 节中我们给出平滑方案的累积误差为  $E_{total}(2) = 0.2348$ ,而经典的格式仅仅 3 格距上的波动就超过了这一误差值,因而平滑方案是有效的。我们再次使用前文中给出的风场例子来说明在使用相同数目空间格点的情况下,相对于经典格式平滑方案提高了在离散波谱上的精度(二次平滑的情况)。图 6 给出了经典方法和二次平滑方法计算得到在  $x=40h, y \in [5h, 30h]$  上的散度误差分布(图 6a)和  $x=41h, y \in [5h, 30h]$  上的涡度误差分布(图 6b),其他区域也有类似的情况。

值得注意的是不管是图 3、图 4、还是图 6,不管平滑多少次,涡度、散度的计算误差的位相分布基本上是保持不变的。在上述风场涡度、散度的计算例子中,我们通过观察最大误差可以发现:对于涡度计算,一次平滑的最大误差是 0 次平滑的 0.06,二次平滑的最大误差是 0 次平滑的 0.04 倍;对于散度计

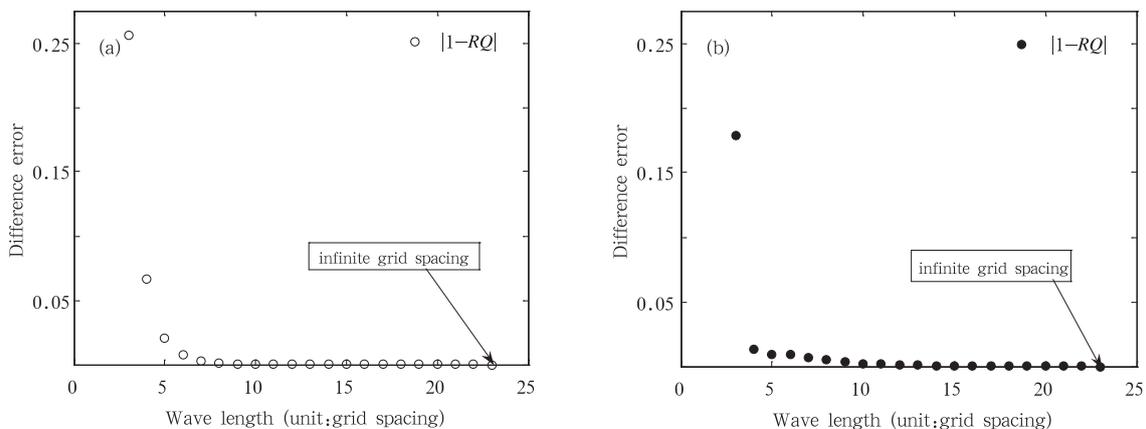


图 5 3—22 格距的波动差分误差  $|1 - RQ|$

(a, b 分别是经典的情况和二次平滑的情况,箭头表示的是无限格距波动的差分误差(都为 0))

Fig. 5 Difference error  $|1 - RQ|$  for wavelength of 3 to 22 grid spacings

(a. the classical case, b. secondary smoothing case. The arrow here indicates the error for infinite grid spacings is 0)

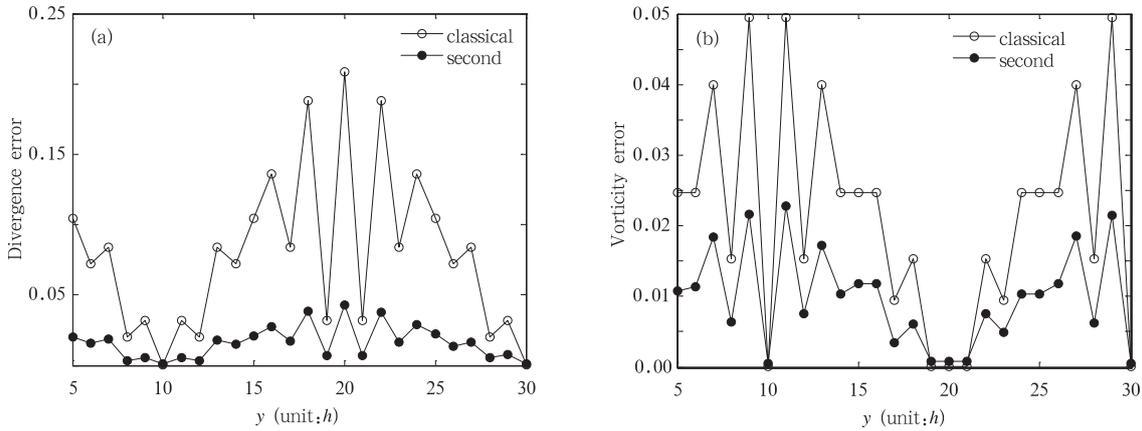


图 6 用经典差分格式和二次平滑分别计算得到的误差分布(单位:  $10^{-6} s^{-1}$ )  
 (a、b 分别表示的是  $x=40h, y \in [5h, 30h]$  上的散度误差分布和  $x=41h, y \in [5h, 30h]$  上的涡度误差分布)  
 Fig. 6 The error distribution for the classical difference method and secondary smoothing method (unit:  $10^{-6} s^{-1}$ )  
 (a. divergence error distribution for line  $x=40h, y \in [5h, 30h]$ ,  
 b. vorticity error distribution for line  $x=41h, y \in [5h, 30h]$ )

算,一次平滑的最大误差是 0 次平滑的 0.2,二次平滑的最大误差是 0 次平滑的 0.04 倍;在使用相同的计算代价下二次平滑的最大误差是经典格式的 0.3 左右。由此可见,二次平滑格式是有效的。

### 9 结论

本文最优频谱的思想是基于傅里叶分析理论和谱方法的,这种最优频谱直接决定于选定的网格特征,文中构造物理场去替代原先场作中央差分计算的思想则来源于伍荣生(1979)的文章。我们主要利用了平滑物理场的方法来构造物理场,确定平滑系数的方法是泰勒约束加上最小二乘法,并且有人为规定的上限原则:若  $E_{total}(i) - E_{total}(i+1) < \frac{1}{i} E_{total}(i)$ ,则平滑次数的上限为  $i(i \neq 0)$ ,我们得到的平滑次数上限为 3 次,此时 3—22 格距的波动上的累积误差为 0.1198。数值模拟的结果也证明了本文方案的优势。

本文方案使用到了平滑物理场的方法,由于平滑会使预报区域(全球模式不存在这个问题)不断减小,为了使预报区域的大小不受影响,我们必须扩大模式区域,以抵消平滑带来的负面效应;但是模式边界上的差分计算误差向模式区域内部的传入仍是一个问题,需要在今后的工作中予以解决。

**致谢:**感谢在本文初稿阶段南京大学储惠芸老师、方娟教授和中国科学院大气物理所高守亭研究员给予的启发,感谢在初审阶段审稿老师提供的改进意见,感谢在修改稿期间

韩瑛同学和王元老师提供的帮助。

### References

Cai Qifa. 2007. Application of variational method to typhoon researches [D](in Chinese). Nanjing: PLA University of Science and Technology, 75-96  
 Chen Xionsan. 1979. Numerical study of the advection equation. Sci Atmos Sinica (in Chinese), 3(2):109-119  
 Cui Xingqiang, Qui Chongjian. 1990. An experiment and study of the five-point finite difference scheme. Meteor Mon (in Chinese), 16(5):11-15  
 Haltiner G J. 1971. Numerical Weather Prediction. John Wiley & Sons, INC, 90-115  
 Li Jiangtao. 2006. Optimal difference method research and application [D] (in Chinese). Chengdu: Chengdu University of Technology, 3-10  
 Wang Yuan, Wu Rongsheng. 2002. An optimal spatial finite-difference operator which reduces truncation error to a minimum. Adv Atmos Sci, 19(3):468-486  
 Wu Rongsheng. 1979. A new finite difference scheme reducing truncation error to minimum. Sci Atmos Sinica (in Chinese), 3(2):120-130

### 附中文参考文献

蔡其发. 2007. 变分方法在台风研究中的应用[D]. 南京:解放军理工大学, 75-96  
 陈雄山. 1979. 平流方程的数值研究. 大气科学, 3(2):109-119  
 崔新强, 邱崇践. 1990. 五点差分格式的试验研究及其最优方案. 气象, 16(5):11-15  
 李江涛. 2006. 最佳差分方法研究与应用[D]. 成都理工大学, 3-10  
 伍荣生. 1979. 提高差分与微分逼近程度的一个新方案. 大气科学, 3(2):120-130